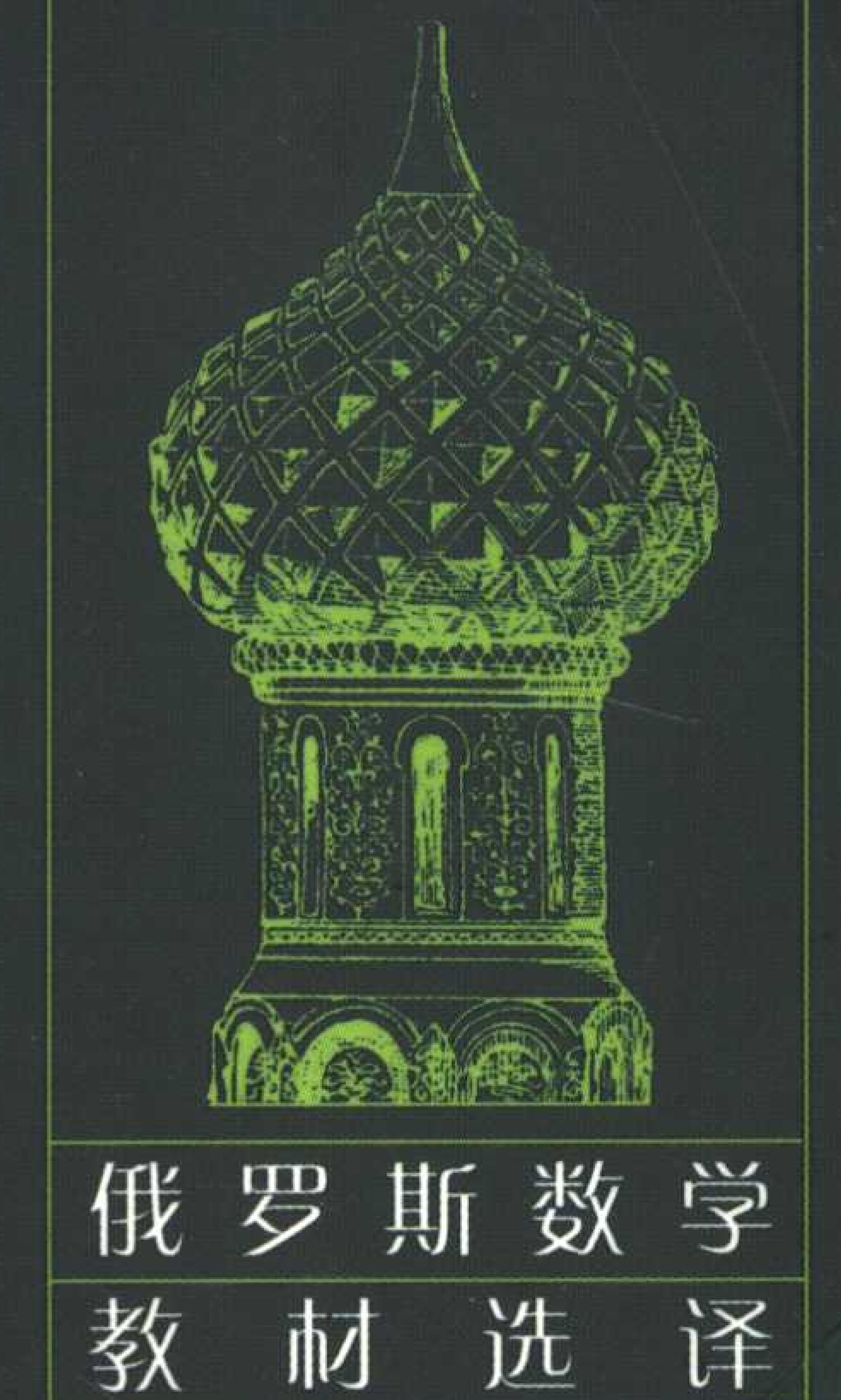


俄罗斯数学
教材选译

常微分方程

(第6版)

□ Л. С. 庞特里亚金 著
□ 林武忠 倪明康 译

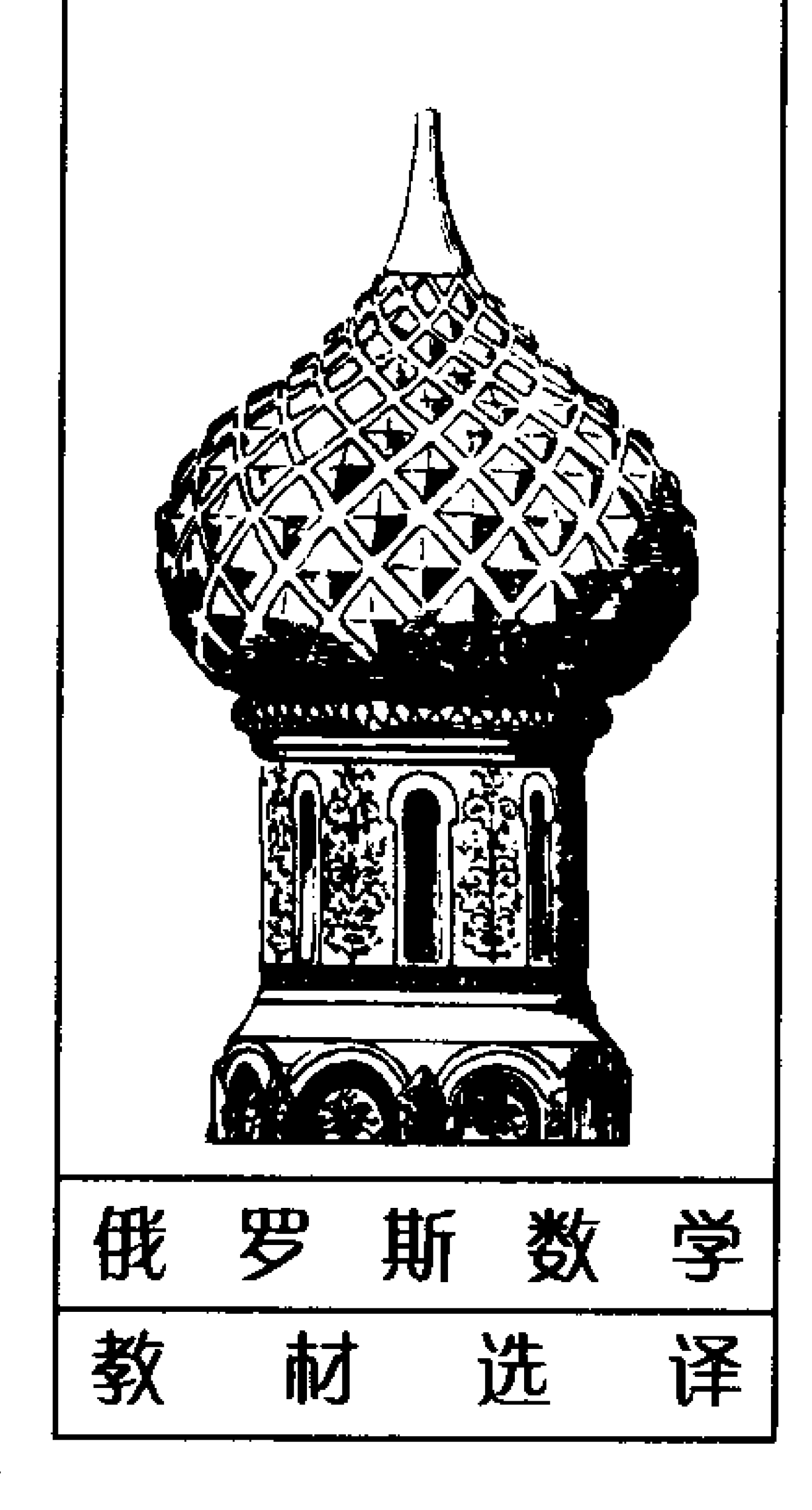


高等教育出版社
Higher Education Press

本书是 Л. С. 庞特里亚金院士根据他多年在莫斯科大学数学力学系所用的讲义编成的一本教材。它的第一次出版是在1961年，现在的第6版有不少的修改。本书从编写的指导思想到内容的具体安排上，与传统教材有很大的不同。作者从常微分方程在现代科学技术方面的应用出发，对材料作了新的选择和安排，不仅讲述了纯数学的常微分方程理论，同时还讲述了有关的技术应用本身。全书包括引论，常系数线性方程，变系数线性方程，存在性定理，稳定性共五章，另外还有两个与本书内容密切联系的附录，即一些分析问题和线性代数知识。每节后面都有例子或者实际应用问题。

本书可供高等学校数学、物理、工程及相关专业的本科生、硕士生、教师，以及相关领域的研究人员参考使用。





俄罗斯数学
教材选译

● 数学天元基金资助项目

常微分方程

(第 6 版)

□ Л. С. 庞特里亚金 著
□ 林武忠 倪明康 译

高等教育出版社
Higher Education Press

图字：01–2005–5737 号

Л. С. Понтрягин

Обыкновенные дифференциальные уравнения, 2001

Originally published in Russian under the title

The ordinary differential equations by L. S. Pontryagin

图书在版编目（CIP）数据

常微分方程：第 6 版 / （俄罗斯）庞特里亚金著；林武忠，倪明康译. —北京：高等教育出版社，2006.6

ISBN 7-04-018399-4

Ⅰ.常… Ⅱ.①庞…②林…③倪… Ⅲ.常微分方程－高等学校－教材 Ⅳ.0175.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2006）第 052384 号

策划编辑 张小萍　**责任编辑** 赵天夫　**封面设计** 王凌波

责任印制 陈伟光

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	涿州市星河印刷有限公司	畅想教育	http://www.widedu.com
开　　本	787×1092　1/16	版　　次	2006 年 6 月第 1 版
印　　张	18	印　　次	2006 年 6 月第 1 次印刷
字　　数	340 000	定　　价	35.00 元

物料号 18399-00

《俄罗斯数学教材选译》序

从上世纪 50 年代初起, 在当时全面学习苏联的大背景下, 国内的高等学校大量采用了翻译过来的苏联数学教材. 这些教材体系严密, 论证严谨, 有效地帮助了青年学子打好扎实的数学基础, 培养了一大批优秀的数学人才. 到了 60 年代, 国内开始编纂出版的大学数学教材逐步代替了原先采用的苏联教材, 但还在很大程度上保留着苏联教材的影响, 同时, 一些苏联教材仍被广大教师和学生作为主要参考书或课外读物继续发挥着作用. 客观地说, 从解放初一直到文化大革命前夕, 苏联数学教材在培养我国高级专门人才中发挥了重要的作用, 起了不可忽略的影响, 是功不可没的.

改革开放以来, 通过接触并引进在体系及风格上各有特色的欧美数学教材, 大家眼界为之一新, 并得到了很大的启发和教益. 但在很长一段时间中, 尽管苏联的数学教学也在进行积极的探索与改革, 引进却基本中断, 更没有及时地进行跟踪, 能看懂俄文数学教材原著的人也越来越少, 事实上已造成了很大的隔膜, 不能不说是一个很大的缺憾.

事情终于出现了一个转折的契机. 今年初, 在由中国数学会、中国工业与应用数学学会及国家自然科学基金委员会数学天元基金联合组织的迎春茶话会上, 有数学家提出, 莫斯科大学为庆祝成立 250 周年计划推出一批优秀教材, 建议将其中的一些数学教材组织翻译出版. 这一建议在会上得到广泛支持, 并得到高等教育出版社的高度重视. 会后高等教育出版社和数学天元基金一起邀请熟悉俄罗斯数学教材情况的专家座谈讨论, 大家一致认为: 在当前着力引进俄罗斯的数学教材, 有助于扩大视野, 开拓思路, 对提高数学教学质量、促进数学教材改革均十分必要. 《俄罗斯数学教材选译》系列正是在这样的情况下, 经数学天元基金资助, 由高等教育出版社组织出版的.

经过认真选题并精心翻译校订, 本系列中所列入的教材, 以莫斯科大学的教材为主, 也包括俄罗斯其他一些著名大学的教材. 有大学基础课程的教材, 也有适合大学高年级学生及研究生使用的教学用书. 有些教材虽曾翻译出版, 但经多次修订重版, 面目已有较大变化, 至今仍广泛采用、深受欢迎, 反射出俄罗斯在出版经典教材方面所作的不懈努力, 对我们也是一个有益的借鉴. 这一教材系列的出版, 将中俄数学教学之间中断多年的链条重新连接起来, 对推动我国数学课程设置和教学内容的改革, 对提高数学素养、培养更多优秀的数学人才, 可望发挥积极的作用, 并起着深远的影响, 无疑值得庆贺, 特为之序.

李大潜

2005 年 10 月

原书的序

本书是以我多年在国立莫斯科大学数学力学系教学的讲义为蓝本编写而成的. 在编写该课程教学大纲时我从这样的原则出发, 就是内容的选取不应该是随意的, 也不应该仅仅依靠原有的传统. 常微分方程在振动理论和自动控制理论中找到了相当重要的和引人入胜的应用, 这些应用也成了我选材的指导思想. 毫无疑问,振动理论和自动控制理论在整个近代物质文明的发展中起了十分重要的作用, 所以我认为, 这样选择课程材料的途径即使不是唯一的, 但在任何情况下也是合理的. 我希望给予大学生们的不只是对技术应用有效的纯粹数学工具, 同时也要展示应用的本身, 所以我在讲义中加进了一些技术问题, 它们在本书的第 13, 27, 29 节中进行讲述. 这些问题构成了我的课程, 因而也是本书不可分割的组成部分.

除了讲义中介绍的内容外, 还编入了一些在大学生讨论班上研究的比较困难的问题. 它们被放在本书的第 19, 31 节中. 包含在第 14, 22, 23, 24, 25, 30 节中的一部分内容在课堂上讲过, 但不是每年都讲.

为了读者的方便, 在本书的末尾添加了两个附录; 虽然它们不是常微分方程的内容, 但对学习该课程很重要. 在第一个附录 (上一版没有写) 中介绍了欧氏空间中集合的基本拓扑性质, 并给出了隐函数定理的证明; 第二个附录是有关线性代数的知识.

在这第二版中, 采用新方法介绍了解对初值和参数的连续依赖性和可微性定理, 并做了许多小的修改.

最后我想感谢我的学生和工作中的密友 B. Γ. 博尔强斯基, P. B. 加姆克列利泽和 E. Φ.米先柯, 他们帮助我对本书的出版做了许多整理、编写和打印工作. 同样我想指出对我的科学兴趣起过决定性影响的前苏联杰出的振动理论和自动控制理论

专家亚历山大·亚历山大洛维奇·安德罗诺夫, 我与他多年来保持着友好的关系. 他的影响决定了本书的特点和方向.

Л. С. 庞特里亚金

目　录

第一章　引论

这一章首先给出下面就要研究的那些概念的定义，譬如什么是常微分方程组，什么叫做它的解，以及存在多少这种解，这样一些主要问题都要在本章中给以回答. 解的数量是由一些存在和唯一性定理来确定，在这里只对它们进行叙述而不加以证明. 这些定理以及一系列其他同样类型定理的证明都将在第四章给出，到那时在本章中所叙述的这些定理已经被多次用过而弄清楚它们的意义了. 除了这些基本知识以外，在第一章还要给出几种最简单类型微分方程的解法. 本章最后讨论了复值函数的微分方程以及它们的复值解，并且介绍了有关线性微分方程组的最简单知识.

§1. 一阶微分方程式

微分方程是指这样的方程，其中未知的是单变量或多变量的 (一个或几个) 函数，而且在方程中不仅含有函数本身而且含有它们的导函数. 如果方程中的未知函数是多变量函数，那么称这类方程为**偏微分方程**；否则，即当所讨论的函数只是单变量函数时，那么就称这种方程为**常微分方程**. 我们今后只讨论常微分方程.

因为在许多物理应用中，未知待求函数的自变量是时间，通常把它记为 t，所以今后用 t 表示自变量；而用 x, y, z 等表示未知函数. 函数关于 t 的导数一般用点来表示: $\dot{x} = \dfrac{dx}{dt}$，$\ddot{x} = \dfrac{d^2x}{dt^2}$，等.

当使用这种记法不方便或者不可能时，我们就用带括弧的上标来指出导数的阶数，例如，$x^{(n)} = \dfrac{d^nx}{dt^n}$.

首先我们着手讨论一个**一阶微分方程**，亦即只含未知函数一阶导数的方程，它

可以写成如下形式:

$$F(t,x,\dot{x})=0. \tag{1}$$

这里t是自变量, x是t的未知函数, $\dot{x}=\dfrac{dx}{dt}$是未知函数的导数; 函数F是三个变量的给定函数.

函数F可能不是对其变量所有的值都有定义, 所以要讨论**函数F的定义域**B. 这里的区域B指的是三个变量$t,x,\dot{x}$坐标空间中的点集. 当自变量t的函数$x=\varphi(t)$在某个区间$r_1<t<r_2$(不排除$r_1=-\infty,r_2=+\infty$的情形)上有定义, 而且当用$\varphi(t)$代替(1)式中的x时, 得到了在整个区间$r_1<t<r_2$上的恒等式, 就称这个函数$x=\varphi(t)$是方程(1)的**解**; 而称区间$r_1<t<r_2$为解$\varphi(t)$的**定义区间**. 显然, 只有当函数$\varphi(t)$在整个区间$r_1<t<r_2$上有一阶导数 (特别, 函数是连续的) 时才可能在关系式(1)中做替换$x=\varphi(t)$; 为了能够在关系式(1)中做替换$x=\varphi(t)$, 还必须使得当变量t在区间$r_1<t<r_2$中取任一值时, 以$(t,\varphi(t),\dot{\varphi}(t))$为坐标的点属于函数$F$的定义集合$B$.

关系式(1)联系着三个变量t, x, $\dot{x}$. 在某些情形下, 它把变量$\dot{x}$确定作为自变量t,x的单值隐函数. 这时, 微分方程(1)等价于形式为

$$\dot{x}=f(t,x) \tag{2}$$

的微分方程. 我们称(2)是**已解出导数的**微分方程, 它与较一般的微分方程(1)相比, 在某些方面更容易研究. 我们现在就是讨论已解出导数的方程, 且不再认为关系式(2)是由形式(1)的方程关于$\dot{x}$解出来的结果, 而是以两个自变量t, x的给定函数$f(t,x)$作为出发点.

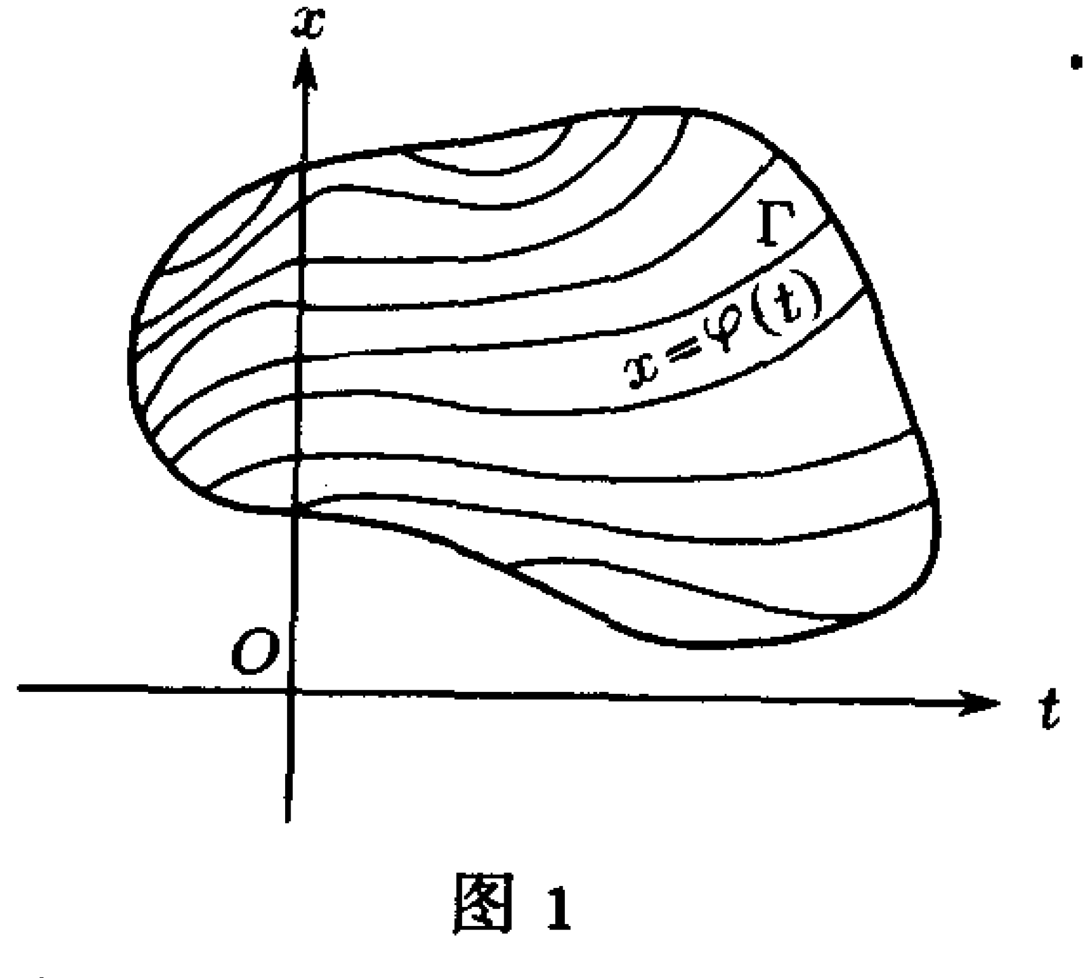


图 1

为了利用直观的几何表示, 我们在讨论中引进了变量t和x的坐标平面P; 这时, 我们将把自变量t放在横坐标轴上, 而把未知函数x放在纵坐标轴上. 确定微分方程(2)的函数f可能不是对自变量t和x所有的值都有定义, 或者用几何语言来说, 不是在平面P的所有点处而仅在P的某一集合Γ上有定义(图 1). 关于集合Γ, 我们今后总假设它是**开的**; 这就意味着, 对Γ中的每一点p, 同时还有一个中心在点p处, 半径为正的圆整个位于Γ中 (参看§32). 关于函数f还假设它本身及其偏导数$\dfrac{\partial f}{\partial x}$在整个集合$\Gamma$上都是$t,x$这对变量的连续函数. 于是方程(2)的解$x=\varphi(t)$在平面$P$上的几何表示就是以$x=\varphi(t)$为方程的曲线. 这条曲线处处有切线, 而且完全落在开集Γ中; 这条曲线就称为微分方程(2)的**积分曲线**.

存在和唯一性定理

如所周知, 在代数学中回答各种代数方程组解的个数问题的定理起了很大的作

用, 例如, 证明 n 次多项式正好有 n 个根 (有几重就算几个) 的**代数基本定理**就是这样. 完全一样, 在微分方程理论中, 有关微分方程存在多少个解的问题也是重要的理论问题. 结果是每一个微分方程都有一个**无限多个解**的集合, 所以对微分方程应当提出的不是关于解的个数问题, 而是关于如何描述给定微分方程所有解的集合. 在本节中叙述而不加证明的**存在和唯一性定理** (定理 1) 回答了这个问题. 至于这个定理的证明, 我们在本书相当后面 (见 § 20) 才给出.

定理 1 *给定微分方程*

$$\dot{x} = f(t, x); \tag{3}$$

假设函数 $f(t,x)$ 在变量 (t,x) 平面 P 的某一个开集 Γ 上有定义, 并且在整个开集 Γ 上函数 f 本身及其偏导数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ 都是 t,x 的连续函数; 那么定理断定:

1° 对于集合 Γ 的任一点 (t_0, x_0), 方程 (3) 都存在着解 $x = \varphi(t)$, 它满足条件:

$$\varphi(t_0) = x_0; \tag{4}$$

2° 如果 $x = \psi(t)$ 和 $x = \chi(t)$ 是方程 (3) 的两个解, 只要它们在某一个值 $t = t_0$ 处是一样的, 也就是如果满足

$$\psi(t_0) = \chi(t_0),$$

那么对于两者都有定义的变量 t 值, 它们是恒等的.

数 t_0, x_0 称为解 $x = \varphi(t)$ 的**初始值**, 而关系式 (4) 称为这个解的**初始条件**. 我们也说, 解 $x = \varphi(t)$ **满足初始条件** (4), 或者说它**具有初始值** t_0, x_0. 当确定 $x = \varphi(t)$ 满足初始条件 (4) (或者具有初始值 t_0, x_0) 时, 总认定解 $x = \varphi(t)$ 的定义区间 $r_1 < t < r_2$ 含有点 t_0.

于是定理 1 断定, 集合 Γ 任一点 (t_0, x_0) 的坐标都是方程 (3) 某一解的初始值, 并且两个具有相同初始值的解是完全一样的.

定理 1 的几何涵义在于, **通过集合 Γ 的每一点** (t_0, x_0), **有且只有方程** (3) **的一条积分曲线通过** (见图 1).

一般来说, 过集合 Γ 的每一点 (t_0, x_0) "只有一条" 积分曲线通过; 要是允许在某一点处不是这样, 那么方程 (3) 确实除了存在于完全确定区间 $r_1 < t < r_2$ 上有定义的解函数 $x = \varphi(t)$ 之外, 还可能存在函数 $x = \psi(t)$, 它也满足方程 (3) 以及具有同样初始值 t_0, x_0, 但它是在另外一个区间 $s_1 < t < s_2$ 上有定义. 定理 1 的第二部分断定: 仅在两者都有定义的区间上, 函数 $\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$ 才完全相同, 但是绝对没有说过, 它们的定义区间 $r_1 < t < r_2$ 和 $s_1 < t < s_2$ 是一样的.

如果区间中之一, 例如 $s_1 < t < s_2$, 完全包含了另一个区间, 那么我们就称定义在区间 $s_1 < t < s_2$ 上的解 $x = \psi(t)$ 为解 $x = \varphi(t)$ 的**延拓**. 这时人们的注意力自然都集中在那些既不能向左, 又不能向右延拓的解上. 我们称这种解为**不可延拓的解**. 不难证明 (但这将在较后面作出, 见 § 22), 每一个解都可以用唯一的方法延拓到不可延

拓解. 现在如果把不可延拓解放在积分曲线图之中, 那么过每一点 (t_0, x_0) 通过唯一积分曲线的结论就是正确的.

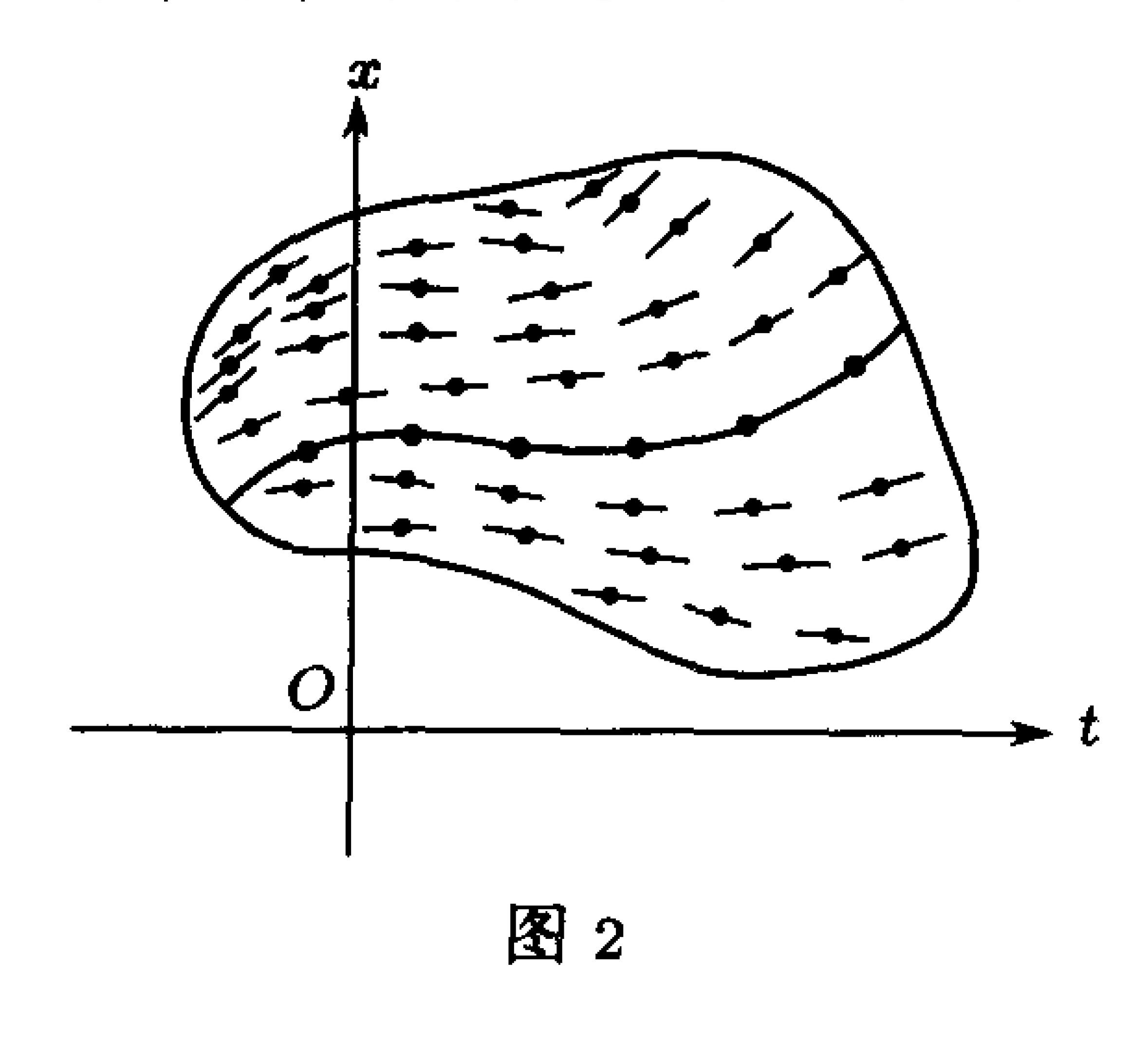


图 2

我们已经用函数 $\varphi(t)$ 的图形对方程 (3) 的每一解 $x=\varphi(t)$ 作了几何解释. 现在来给出方程 (3) 本身的几何解释: 过集合 Γ 的每一点 (t, x), 引一条斜率为 $f(t, x)$ 的直线 $l_{t,x}$, 我们就得到了对应于方程 (3) 的**方向场**, 这就给出了该方程的几何解释.

方程的几何解释与它的解的几何解释之间的联系是: **任一积分曲线** $x=\varphi(t)$ **在它的每一点** $(t, \varphi(t))$ **处与直线** $l_{t,\varphi(t)}$ **相切** (图 2).

例题

1. 为了说明定理 1 的意义 (在此是指它的第二部分), 我们求解微分方程

$$\dot{x}=\alpha x, \tag{5}$$

其中 α 是实数. 这里

$$f(t, x)=\alpha x,$$

从而函数 f 实际上只依赖于变量 x; 在这种情况下, 函数 f 的定义集合是整个平面 P. 函数 $f(t, x)=\alpha x$ 本身及其导数 $\dfrac{\partial f(t, x)}{\partial x}=\alpha$ 都是变量 t 和 x 在整个平面 P 上的连续函数, 因此, 对于方程 (5) 可以应用定理 1. 直接把函数

$$x=c e^{\alpha t} \tag{6}$$

代入方程 (5), 可以验证函数 (6) 的每一个函数都是方程 (5) 的解, 其中 c 是任一实数. 解 (6) 是不可延拓的, 因为它已经定义在整条直线 $-\infty<t<+\infty$ 上. 我们来证明, 当给数 c 以所有可能的值时, 就得到方程 (5) 所有的解. 假设 $x=\varphi(t)$ 是该方程的任意解, 我们来证明, 可以选择常数 c 使得 $\varphi(t)=c e^{\alpha t}$. 为此令 t_0 是解 $\varphi(t)$ 存在区间中的某一点, 而且 $x_0=\varphi(t_0)$. 于是我们若取 $c=x_0 e^{-\alpha t_0}$, 则方程 (5) 的解 $x=\varphi(t)$ 和 $x= c e^{\alpha t}=x_0 e^{\alpha(t-t_0)}$ 有相同的初始值 (t_0, x_0), 因此由定理 1 的第二部分, 它们是同一个解. 所以公式 (6) 给出了微分方程 (5) 所有解的集合.

2. 我们来给出放射性物质**衰变过程**的数学描述. 用 $x(t)$ 表示到时刻 t 还没有衰变的物质数量, 由物理的设想推出 (如果没有条件得到整个反应过程的话), 衰变速度, 即导数 $\dot{x}(t)$, 是与放射性物质尚未衰变的数量成正比:

$$\dot{x}(t)=-\beta x(t),$$

其中β是一个依赖于放射性物质性质的常数正比例系数，而右边的负号表示$x(t)$是减小的. 我们看出，函数$x(t)$满足例题1中所讨论的最简单的微分方程，所以

$$x(t) = c\,e^{-\beta t}.$$

为了确定常数c，只要指定初始值就够了. 例如，如果知道在时刻$t=0$时，物质的数量是x_0，那么$c=x_0$，而且有

$$x(t) = x_0\,e^{-\beta t};$$

这里衰变速度是用量纲为1/ 秒的量β表示的. 常常用所谓**半衰期**，即物质衰变一半所用的时间，来代替量β对衰变速度性质的描述. 以T表示半衰期，我们来建立量β与T之间的关系. 我们有

$$\frac{x_0}{2} = x_0\,e^{-\beta T},$$

由此得到

$$T = \frac{1}{\beta}\ln 2.$$

§2. 一些初等的求积方法

当我们研究微分方程时，所面临的主要问题就是求出它的解. 在微分方程理论中，正像在代数学中那样，关于所谓寻找方程解的问题可以用不同方式来理解. 在代数学中，最初是企图找出利用开根的办法来求出任意次方程解的一般公式，例如二次方程解的公式，三次方程解的卡尔旦 (Cardan) 公式和四次方程解的费拉里 (Ferrari) 公式. 后来证明了，运用开根来求解四次以上方程的一般公式是不存在的. 可是，始终存在着求出数值系数方程近似解的可能性，以及还可以研究方程的根对其系数的依赖性. 在微分方程理论中，解的概念大致也是这样演变的，开始时总是力图去求出微分方程的解，或者所谓“用求积方式积分出微分方程”，也就是说试图用初等函数以及它们的积分来表示出解. 以后，当弄清楚只有对少数类型的方程才存在这种意义下的解时，理论的重心就转移到对解的性态的一般规律性研究.

在这一节中，我们将介绍某些最简单一阶方程的求积方法.

(A) 全微分方程 我们来求解方程

$$\dot{x} = \frac{g(t,x)}{h(t,x)}, \tag{1}$$

它的右边是函数$g(t,x)$与函数 $h(t,x)$商的形式. 假设函数$g(t,x)$和$h(t,x)$在变量t，x平面P的某个开集Γ上有定义且连续，分母$h(t,x)$在这个集合的每一点处都不为零，而且表达式$h(t,x)dx - g(t,x)dt$在整个集合Γ上是全微分. 最后这个假设意味着存在一个定义于集合Γ上的函数$F(t,x)$，它在整个集合Γ上满足条件

$$\frac{\partial F(t,x)}{\partial x} = h(t,x), \quad \frac{\partial F(t,x)}{\partial t} = -g(t,x). \tag{2}$$

于是将方程 (1) 约定写成如下形式的方程

$$h(t,x)dx - g(t,x)dt = 0,$$

它的左边是全微分. 因此对方程 (1) 的每一个解 $x = \varphi(t)$, 都有恒等式

$$f(t,\varphi(t)) \equiv \text{常数}$$

成立. 反之, 每一个由 (含有任意常数 c 的) 方程

$$F(t,x) = c \tag{3}$$

确定的且定义在某个区间上的隐函数 $x = \varphi(t)$, 都是微分方程 (1) 的解.

我们来证明命题 (A). 设 $x = \varphi(t)$ 是微分方程 (1) 定义在区间 $r_1 < t < r_2$ 上的解, 于是对这个区间所有的点我们有

$$\dot{\varphi}(t) = \frac{g(t,\varphi(t))}{h(t,\varphi(t))},$$

由此得到

$$h(t,\varphi(t))\dot{\varphi}(t) - g(t,\varphi(t)) = 0.$$

由 (2), 这个等式的左端是函数 $F(t,\varphi(t))$ 对 t 的全导数, 因此在整个区间 $r_1 < t < r_2$ 上有

$$\frac{d}{dt}F(t,\varphi(t)) = 0.$$

根据分析上的已知定理, 即知函数 $F(t,\varphi(t))$ 在整个区间上是常数.

反之, 设 $x = \varphi(t)$ 是方程 (3) 在某个区间上的解, 因此有

$$F(t,\varphi(t)) \equiv c.$$

将这个恒等式对 t 求导, 由 (2) 我们即得

$$h(t,\varphi(t))\dot{\varphi}(t) - g(t,\varphi(t)) = 0,$$

由此看出, $x = \varphi(t)$ 是微分方程 (1) 的解. 于是命题 (A) 得证.

在命题 (A) 中所叙述的结果可以作出如下几何解释. **微分方程 (1) 的每一条积分曲线都完全位于函数 $F(t,x)$, 亦即由方程 (3) 确定, 的某条水平线上. 反之, 每一条水平线的连通部分 (亦即方程 (3) 定义在某个区间 $r_1 < t < r_2$ 上解的图形) 都是积分曲线.**

由于函数 $F(t,x)$ 的水平线可能是由分开的几段组成, 所以在这种情况下 $F(t,x)$ 的水平线就不只是一条积分曲线, 而是分布着几条的积分曲线. 换句话说, 根据隐方程 (3), 一个常数 c 可能确定几个 (甚至无限多个, 参看例 3) 不同的不可延拓解.

(B) 线性方程 我们求解方程

$$\dot{x}=a(t)x+b(t)\,, \tag{4}$$

其中 $a(t)$ 和 $b(t)$ 在某个区间 $r_1<t<r_2$ (不排除 $r_1=-\infty$ 和 $r_2=+\infty$ 的情况) 上有定义且连续. 因此, 在平面 P 中的开集 Γ 是由加在 t 上的条件 $r_1<t<r_2$ 和任意的 x 所确定. 如果 r_1 和 r_2 都是有限的, 那么这个集合 Γ 就是带形区域; 如果量 r_1,r_2 中只有一个是有限的, 那么这个集合就是半平面; 如果两个量 r_1,r_2 都是无限的, 那么就是平面. 在整个集合 Γ 上, 方程 (4) 右边的函数及其对 x 的偏导数都是连续的, 所以对于方程 (4) , 定理 1 的条件都满足了. 令 t_0 为区间 $r_1<t<r_2$ 中的某一个点. 我们记

$$A(t)=\int_{t_0}^{t}a(\tau)d\tau\,. \tag{5}$$

函数 $A(t)$ 在整个区间 $r_1<t<r_2$ 上都有定义. 于是, 方程 (4) 所有解的集合就写成公式

$$x=\left(x_0+\int_{t_0}^{t}e^{-A(\tau)}b(\tau)d\tau\right)e^{A(\tau)}\,, \tag{6}$$

这里 x_0 是任意常数. 这些解中的每一个都在整个区间 $r_1<t<r_2$ 上有定义, 从而是不可延拓的 (因为在这个积分上下限之外, 方程 (4) 的右端没有定义).

为了证明命题 (B) , 我们首先注意到关系式 (6) 给定的函数 x 是方程 (4) 的解. 这可用代入的方法直接验证.

我们证明公式 (6) 包含了方程 (4) 所有的解. 令 $x=\varphi(t)$ 是方程 (4) 定义在区间 $s_1<t<s_2$ 上的任一解. 这个区间应当被包含在区间 $r_1<t<r_2$ 之中, 因为方程 (4) 的右边只在区间 $r_1<t<r_2$ 上有定义. 令 τ_0,ξ_0 为解 $x=\varphi(t)$ 的初始值. 我们证明, 可以这样选择公式 (6) 中的数 x_0 , 使得用这个公式确定的解, 其初始值就是 $\tau_0,\xi_0,$, 亦即满足条件

$$\left(x_0+\int_{t_0}^{t}e^{-A(\tau)}b(\tau)d\tau\right)e^{A(\tau_0)}=\xi_0\,. \tag{7}$$

由此即可证明 (见定理 1) 解 $x=\varphi(t)$ 与解 (6) 在整个区间 $s_1<t<s_2$ 上完全一样.

关系式 (7) 对于未知量 x_0 来说是一次方程, 而且 x_0 的系数 $e^{A(\tau_0)}$ 不等于零, 从而方程 (7) 关于未知量 x_0 是可解的. 于是命题 (B) 得证.

为了进行对比, 我们介绍另一个 (在大量教科书中采用的) 便于记忆的有关公式 (6) 的推导. 首先考虑**齐次**方程

$$\dot{y}=a(t)y\,. \tag{8}$$

这是一个全微分方程 (见 (A)). 事实上, 它可约定写成形式

$$\frac{dy}{y}-a(t)dt=0\,.$$

于是对应的函数 $F(t,x)$ 由公式

$$F(t,x)=\ln|y|-A(t)$$

给出, 因此根据 (A), 齐次方程 (8) 的解由关系式

$$\ln|y|-A(t)=c_1$$

的隐函数确定. 由此得到 $|y|=e^{A(t)+c_1}$, 或者写成另一个样子

$$y=c\,e^{A(t)}, \tag{9}$$

其中 c 可以取任意实数值. (这个推导含有不准确性, 因为函数 $h(t,y)=y$, 而 y 可以等于零, 从而命题 (A) 的第一个条件就不满足; 这种不准确性容易消除, 然而在此我们不这样做, 因为公式 (9) 只是公式 (6) 的特殊情形, 而后者在上面已完全证明.)

为了利用公式 (9) 去求出非齐次方程 (4) 的解, 我们利用所谓的**常数变易法**. 这就是寻找方程 (4) 具有 (9) 那样形式的解, 其中 c 已不再是常数, 而是变量 t 的某个未知函数. 将所设想的这个解代入方程 (4), 即得

$$\dot{c}\,e^{A(t)}+ca(t)e^{A(t)}=a(t)ce^{A(t)}+b(t),$$

或者同样写成

$$\dot{c}\,e^{A(t)}=b(t).$$

由此找到

$$c=\int e^{-A(t)}b(t)dt=x_0+\int_{t_0}^{t}e^{-A(\tau)}b(\tau)d\tau,$$

其中 x_0 为积分常数.

例题

1. 我们来求解所谓的**可分离变量方程**

$$\dot{x}=f(t)g(x).$$

我们假设函数 $f(t)$ 在区间 $r_1<t<r_2$ 上有定义且连续, 而函数 $g(x)$ 在区间 $q_1<x<q_2$ 上有定义、连续且不等于零. 于是所考虑的方程是一个全微分方程. 也就是它可以约定地写成形式:

$$\frac{dx}{g(x)}-f(t)dt=0.$$

其对应的函数 $F(t,x)$ 用公式

$$F(t,x)=\int_{x_0}^{x}\frac{d\xi}{g(\xi)}-\int_{t_0}^{t}f(\tau)d\tau$$

给出. 其中 x_0 属于区间 $q_1 < x < q_2$, 而 x 也在同一区间上变化; t_0 属于区间 $r_1 < t < r_2$, 而 t 也在同一区间上变化. 因此根据命题 (A), 所论方程的一切解由关系式

$$\int_{x_0}^{x} \frac{d\xi}{g(\xi)} = \int_{t_0}^{t} f(\tau)d\tau + c$$

的隐函数得到.

2. 我们求解方程

$$\dot{x} = h\left(\frac{x}{t}\right),$$

这个方程的右端只依赖于变量 x 和 t 的比值. 这种方程称为**齐次的**.

我们假设函数 $h(y)$ 在区间 $a_1 < y < a_2$ 上有定义且连续, 而且在这个区间上函数 $h(y) - y$ 不等于零. 我们用变量替换的方法来求解这个方程. 亦即引进未知函数 y 来代替未知函数 x. 令 $x = yt$. 进行这个替换后, 我们得到关于新未知函数 y 的方程

$$\dot{y}t + y = h(y),$$

或者同样写成

$$\dot{y} = \frac{h(y) - y}{t}.$$

得到的分离变量方程就可以用例题 1 中指出的方法进行求解.

3. 我们求解分离变量方程

$$\dot{x} = x^2 \cos t. \tag{10}$$

它的定义集合 Γ 是整个 (t, x) 平面. 当 $x > 0$ 和 $x < 0$ 时, 这个方程可以用在例题 1 中指出的方法进行求解. 对于这两个半平面中的每一个, 我们都有

$$\int \frac{dx}{x^2} = \int \cos t dt,$$

或者写成另一个样子

$$-\frac{1}{x} = \sin t - c.$$

因此我们得到

$$x = \frac{1}{c - \sin t}. \tag{11}$$

除了用这个公式表示的解外, 我们还有一个显然的解

$$x = 0. \tag{12}$$

我们证明, 公式 (11) 和 (12) 已包括了方程 (10) 所有的解. 令 (t_0, x_0) 为任意初始值. 如果 $x_0 = 0$, 则解 (12) 就有这对初始值. 如果 $x_0 \neq 0$, 那么当

$$c = \sin t_0 + \frac{1}{x_0}$$

时, 解 (11) 就有所指出的初始值. 解 (12) 是定义在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上, 因此是不可延拓的. 完全一样地, 当 $|c|>1$ 时, 公式 (11) 确定了一个在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上的不可延拓解. 当取定满足不等式 $|c|\leqslant 1$ 的常数 c 时, 公式 (11) 就不只给出一个解, 而是一个**解的无限集合**. 这时其中每个单独的解是定义在区间 $r_1<t<r_2$ 上, 这里 r_1 和 r_2 是函数 $\sin t=c$ 的两个相邻零点 (图 3).

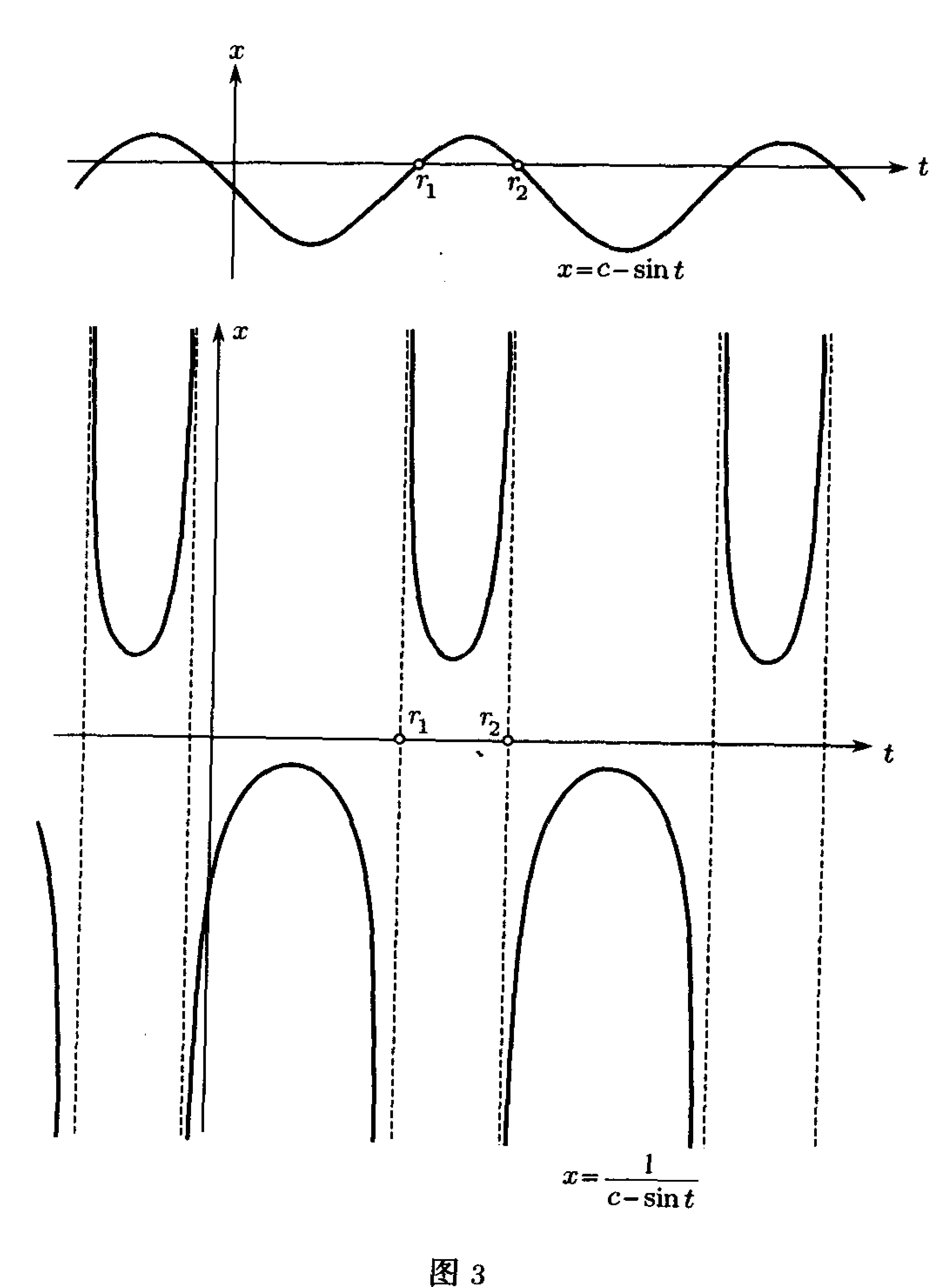


图 3

4. 我们来证明, 如果方程的右端没有连续的偏导数, 那么定理 1 的第二部分 (唯一性) 可能不成立. 为此, 我们考虑方程

$$\dot{x}=3x^{2/3}. \tag{13}$$

方程 (13) 的右边对一切 x 值都有定义且连续, 但是它的导函数 $2x^{-1/3}$ 却在 $x=0$ 处出现间断. 如果取平面 P 上所有满足不等式 $x\neq 0$ 的点集作为 Γ, 那么定理 1 对于方程 (13) 是可用的, 且使用在例题 2 中指出的方法, 方程 (13) 在半平面 $x>0$ 和 $x<0$ 中

的每一个上都可以求解. 采用这种方法求出方程 (13) 的解, 我们得到 $x^{1/3}=t-c$, 或者

$$x=(t-c)^3. \tag{14}$$

函数 (14) 图形 (当 $t<c$ 时) 的一部分是位于半平面 $x<0$ 之中, 而图形 (当 $t>c$ 时) 的另一部分是在半平面 $x>0$ 内. 但是直接验证即知, 对在区间 $-\infty<t<+\infty$ 上所有的 t 值, 函数 (14) 是方程 (13) 的解. 同时, $x\equiv 0$ 也是方程 (13) 的解. 于是, 通过直线 $x=0$ 上的每一点 $x=0, t=c$, 就至少存在方程 (13) 的两个解 (见图 4): 解 (14) 和解 $x=0$. 所以我们看出, 定理 1 的第二部分 (唯一性) 对方程 (13) 不成立.

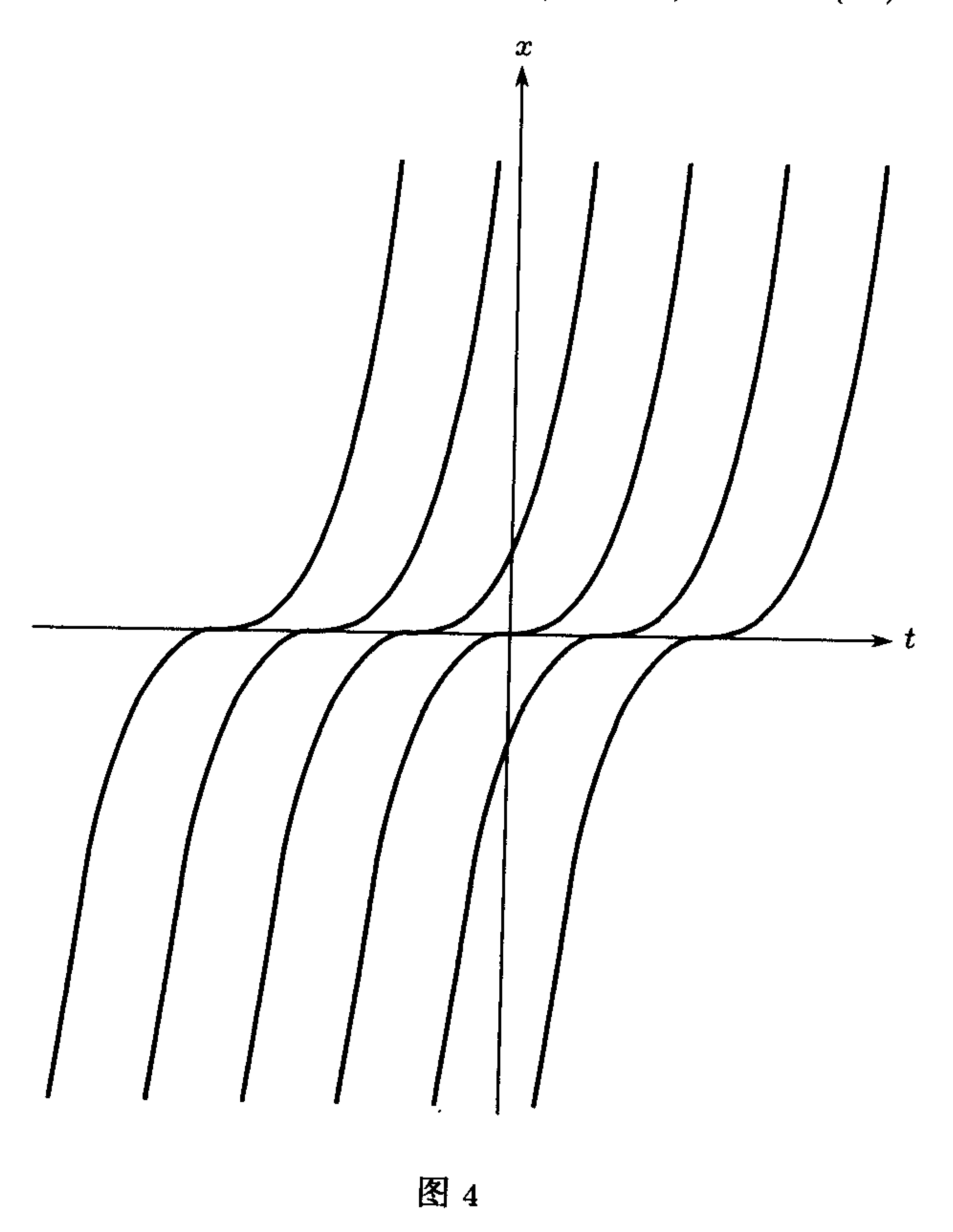


图 4

§3. 存在和唯一性定理的叙述

在 §1 中, 我们讨论了一个一阶微分方程, 并且叙述了这个方程解的存在和唯一性定理. 常微分方程理论还涉及到更一般的方程组. 通常由几个一阶常微分方程式构成的方程组就含有几个未知函数; 这时所有未知函数都是同一个自变量的函数. 在任何情况下存在和唯一性定理都是处在可能对给定微分方程组进行研究的基本理论位置.

存在和唯一性定理是对表面形式稍微特殊的方程组类型进行叙述和证明的; 实际上, 相当一般类型的方程组都可以化成这种方程组. 这里所说的这种特殊类型微分方程组, 我们以后称它是**标准的**.

常微分方程组

$$\dot{x}^i = f^i(t, x^1, \cdots, x^n), \quad i = 1, \cdots, n, \tag{1}$$

叫做标准的. 在这个方程组中, t 是自变量, $x^1, \cdots, x^n$ 是这个变量的未知函数, 而函数 $f^1, \cdots, f^n$ 是定义在 $n+1$ 维空间的某一开集 Γ 上的 $n+1$ 个变量的函数, 这个空间点的坐标就是数量 $t, x^1, \cdots, x^n$. 今后总假设函数

$$f(t, x^1, \cdots, x^n), \quad i = 1, \cdots, n, \tag{2}$$

在开集 Γ 上是连续的, 同时还假设它的偏导数

$$\frac{\partial f^i(t, x^1, \cdots, x^n)}{\partial x^j}, \quad i, j = 1, \cdots, n, \tag{3}$$

在开集 Γ 上存在且连续. 应该指出, 偏导数 (3) 的连续性假设只是关于变量 $x^1, \cdots, x^n$ 的, 而不是关于自变量 t 的.

如果连续函数组

$$x^i = \varphi^i(t), \quad i = 1, \cdots, n, \tag{4}$$

在区间 $r_1 < t < r_2$ 上有定义, 并且满足方程组 (1), 我们就称它为方程组 (1) 的**解**, 而称区间 $r_1 < t < r_2$ 为解 (4) 的**定义区间** (不排除 $r_1 = -\infty, r_2 = +\infty$ 的情形). 所谓函数组 (4) 满足方程组 (1), 是指将它们代替 (1) 中的 $x^1, \cdots, x^n$ 时, 关系式 (1) 在区间 $r_1 < t < r_2$ 上是 t 的恒等式. 为了这样的替换是可能的, 函数 (4) 必须在区间 $r_1 < t < r_2$ 的每一点处都有导数, 且方程组 (1) 的右端对代入后的所有变量的值都有定义, 这就是说, 对于区间 $r_1 < t < r_2$ 中的所有的 t, 以 $t, \varphi^1(t), \cdots, \varphi^n(t)$ 为坐标的点必须属于集合 Γ.

现在叙述标准的方程组 (1) 的存在和唯一性定理. (证明将在 §21 中给出.)

定理 2　*设 (1) 为标准的常微分方程组. 其中方程组 (1) 右端在某一开集 Γ 中有定义, 而函数 (2) 和 (3) 在这个集合上连续. 那么可以证明, 对于集合 Γ 的每一点*

$$t_0, x_0^1, \cdots, x_0^n, \tag{5}$$

存在着方程组 (1) 的定义在含有 t_0 的某一个区间上的解

$$x^i = \varphi^i(t), \quad i = 1, \cdots, n, \tag{6}$$

且满足条件:

$$\varphi^i(t_0) = x_0^i, \quad i = 1, \cdots, n. \tag{7}$$

其次, 可以证明, 如果方程组 (1) 有任何两个解

$$\begin{cases} x^i = \psi^i(t), & i = 1, \cdots, n, \\ x^i = \chi^i(t), & i = 1, \cdots, n, \end{cases} \tag{8}$$

满足条件

$$\psi^i(t_0) = \chi^i(t_0) = x_0^i, \quad i = 1, \cdots, n, \tag{9}$$

并且每一解的定义区间皆含有点 t_0, 那么这两个解在它们的共同的定义区间上处处相等.

我们称 (5) 为解 (6) 的**初始值**, 称关系式 (7) 为这个解的**初始条件**. 今后我们说, 解 (6) **具有初始值** (5), 或者说它**满足初始条件** (7).

于是, 标准方程组的存在和唯一性定理可简述如下:

对于任何初始值 (5), 总存在方程组 (1) 的一个解, 这个解在某一个含点 t_0 的区间上有定义, 并以 (5) 为初始值. 其次, 如果有两个都具有相同初始值 (5) 的解, 其中每一个在各自的定义区间都含有 t_0, 那么这两个解在它们定义区间的公共部分上重合.

完全与在 § 2 一样, 我们在此引进不可延拓解的概念.

(A) 假设

$$x^i = \varphi^i(t), \quad i = 1, \cdots, n, \tag{10}$$

是方程组 (1) 定义在区间 $r_1 < t < r_2$ 上的解, 而

$$x^i = \psi^i(t), \quad i = 1, \cdots, n, \tag{11}$$

也是方程组 (1) 但定义在区间 $s_1 < t < s_2$ 上的解. 如果区间 $s_1 < t < s_2$ 包含了区间 $r_1 < t < r_2$ (亦即 $s_1 \leqslant r_1$, $r_2 \leqslant s_2$), 而且解 (10) 与解 (11) 在区间 $r_1 < t < r_2$ 上完全一样, 我们就说解 (11) 是解 (10) 的**延拓**. 特别, 当两个解完全一样, 即 $s_1 = r_1, r_2 = s_2$ 的情况下, 我们也认为解 (11) 是解 (10) 的延拓. 我们将称解 (10) 为**不可延拓的**, 如果不存在任何不同于它本身的延拓解.

不难证明 (但这将在后面作出, 见 § 22,(A)), 每一个解都可以用唯一的方法延拓到不可延拓解.

我们现在还要叙述一条存在性定理, 它的证明将在 § 21 中进行.

定理 3 假设

$$\dot{x}^i = \sum_{j=1}^{n} a_j^i(t) x^j + b^i(t), \quad i = 1, \cdots, n, \tag{12}$$

是标准的线性方程组; 其中系数 $a_j^i(t)$ 及自由项 $b^i(t)$ 都是自变量 t 定义在某个区间 $q_1 < t < q_2$ 上的连续函数. 于是可以证明, 对于任意的初始值

$$t_0, x_0^1, \cdots, x_0^n, \quad q_1 < t_0 < q_2, \tag{13}$$

方程组 (12) 存在一个以 (13) 为初始值的解, 这个解在整个区间 $q_1 < t < q_2$ 上有定义.

特别, 如果方程组 (12) 的系数及自由项是定义在整个直线上, 即如果 $q_1 = -\infty$, $q_2 = +\infty$ 时, 那么对于任何初始值, 方程组 (12) 都存在着定义在整个无限区间 $-\infty < t < +\infty$ 上的解.

标准方程组 (1) 的解的几何意义是以变量 $t, x^1, \cdots, x^n$ 为坐标的 $n+1$ 维空间中的**积分曲线** (与 § 1 比较), 积分曲线的方程具有形式:

$$x^i = \varphi^i(t), \quad i = 1, \cdots, n, \tag{14}$$

这里 (14) 是方程组的解.

方程组 (1) 本身可以用 $n+1$ 维空间中的方向场做几何解释 (与 § 1 比较).

例题

1. 求解标准线性方程组

$$\dot{x} = -\omega y, \quad \dot{y} = \omega x. \tag{15}$$

对此, 集合 Γ 是坐标为 t, x, y 的整个三维空间. 直接验证即知, 函数组

$$x = c_1 \cos(\omega t + c_2), \quad y = c_1 \sin(\omega t + c_2) \tag{16}$$

是方程组 (15) 的解, 其中 c_1 和 c_2 是任意常数. 为了证明用适当的方法选取常数 c_1 和 c_2 后可由公式 (16) 得到方程 (15) 任意的解, 我们只要任意给定初始值 t_0, x_0, y_0, 并证明在解 (16) 中有方程 (15) 以 t_0, x_0, y_0 为初始值的解. 这时, 我们得到决定常数 c_1 和 c_2 的条件

$$c_1 \cos(\omega t_0 + c_2) = x_0, \quad c_1 \sin(\omega t_0 + c_2) = y_0. \tag{17}$$

设 ρ 和 φ 为点 (x_0, y_0) 的极坐标, 因而有

$$x_0 = \rho \cos \varphi, \quad y_0 = \rho \sin \varphi.$$

于是方程 (17) 可重写成形式:

$$c_1 \cos(\omega t_0 + c_2) = \rho \cos \varphi, \quad c_1 \sin(\omega t_0 + c_2) = \rho \sin \varphi.$$

令

$$c_1 = \rho, \quad c_2 = \varphi - \omega t_0,$$

显然它们满足条件 (17), 所以通过每一点 (t_0, x_0, y_0) 都有由公式 (16) 给定的解. 根据定理 2 (唯一性), 公式 (16) 包括了所有解的集合.

2. 我们证明, 如果方程组 (1) 的右端 (2) 是 k 次连续可微的, 亦即对所有变量 $t, x^1, \cdots, x^n$ 有 k 阶连续偏导数 (包括混合导数), 那么方程组 (1) 的解 (4) 有 $(k+1)$ 阶导数且连续.

事实上, 对于解 (4) 有恒等式

$$\dot{\varphi}^i(t) \equiv f^i(t, \varphi^1(t), \cdots, \varphi^n(t)), \quad i = 1, \cdots, n, \tag{18}$$

成立. 如果方程组 (1) 的右端 (2) 有连续的一阶偏导数, 那么恒等式 (18) 的右端就有对 t 的连续导数, 从而函数 $\ddot{\varphi}^i(t)$ 存在且连续. 对所写出的恒等式 (18) 求导 k 次, 我们相信函数 $\varphi^i(t)$ 按 $2, 3, \cdots, k+1$ 顺序各阶导数的存在性和连续性.

§4. 化一般微分方程组到标准方程组的知识

前一节叙述了标准微分方程组解的存在和唯一性定理. 现在来说明用什么样的方法把很一般的微分方程组化成为标准微分方程组, 同时对这种一般方程组建立解的存在和唯一性定理.

首先我们给出一般形式的微分方程组概念.

在自变量 t 的一个未知函数 x 的情况下, 通常讨论一个方程, 它可以写为形式:

$$F(t, x, \dot{x}, \cdots, x^{(n)}) = 0; \tag{1}$$

其中 t 是自变量, x 是它的未知函数, 而 F 是给定的 $n+2$ 个变量的函数. 函数 F 可能不是对其变量所有的值都有定义, 所以要谈到函数 F 的定义域 B, 这里域 B 是指在 $n+2$ 维坐标空间中的开集 B, 其中点的坐标是变量 $t, x, \dot{x}, \cdots, x^{(n)}$. 如果出现在微分方程中导数的最大阶数等于 n, 就称**方程是 n 阶的**. 微分方程组的阶如果用自变量 t 定义在某个区间 $r_1 < t < r_2$ 上的连续函数 $x = \varphi(t)$ 代替方程 (1) 中的 x 时, 得到 t 在区间 $r_1 < t < r_2$ 上的恒等式, 就称 $x = \varphi(t)$ 是方程 (1) 的**解**. 显然, 仅当函数 $\varphi(t)$ 在区间 $r_1 < t < r_2$ 上具有直到 n 阶导数时, 才能把 $x = \varphi(t)$ 代入关系式 (1), 而且还必须当 $r_1 < t < r_2$ 时使得以 $(t, \varphi(t), \dot{\varphi}(t), \cdots, \varphi^{(n)}(t))$ 为坐标的点属于给定函数 F 的定义域 B.

如果有同一自变量的两个未知函数, 那就要讨论由两个微分方程构成的**方程组**, 它可以写成形式:

$$\begin{cases} F(t, x, \dot{x}, \cdots, x^{(m)}, y, \dot{y}, \cdots, y^{(n)}) = 0, \\ G(t, x, \dot{x}, \cdots, x^{(m)}, y, \dot{y}, \cdots, y^{(n)}) = 0, \end{cases} \tag{2}$$

其中 t 是自变量, x 和 y 是它的两个未知函数, 而 F 和 G 都是定义在某个开集 B 中的 $m+n+3$ 个变量的函数. 如果出现在方程组 (2) 中的函数 x 的导数的最高阶数等于 m, 而出现在方程组 (2) 中的函数 y 的导数的最高阶数等于 n, 那么就称数 m 为方程组 (2) **关于 x 的阶**, 称数 n 为方程组 (2) **关于 y 的阶**, 而称数 $n+m$ 为方程组 (2) 的

阶. 如果把定义在某一区间 $r_1 < t < r_2$ 上的一对函数 $x = \varphi(t)$ 和 $y = \psi(t)$, 代入关系式 (2) 时, 我们得到 t 在区间 $r_1 < t < r_2$ 上的恒等式, 那么就称这对函数为方程组 (2) 的**解**. 与一个方程的情形一样, 要假定满足在方程组 (2) 中可以进行代换 $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ 的条件.

类似地可以定义包含一个自变量的三个和更多未知函数的微分方程组. 如果微分方程的未知函数是 $x^1, \cdots, x^n$, 出现在方程组中的函数 x^i 的导数的最高阶数等于 $q_i, i = 1, \cdots, n$, 那么数 q_i 称为方程组**关于 x^i 的阶**, 而数 $q = q_1 + q_2 + \cdots + q_n$ 称为方程组的**阶**. 于是在 §3 中的标准方程组 (1) 是 n 阶的.

如果关系式 (1) 对 $x^{(n)}$ 是可解的, 那么方程 (1) 可重写为形式:

$$x^{(n)} = f(t, x, \dot{x}, \cdots, x^{(n-1)}). \tag{3}$$

同样, 如果方程组 (2) 关于 $x^{(m)}, y^{(n)}$ 是可解的, 那么这个方程组可重写为形式:

$$\begin{cases} x^{(m)} = f(t, x, \dot{x}, \cdots, x^{(m-1)}, y, \dot{y}, \cdots, y^{(n-1)}), \\ y^{(n)} = g(t, x, \dot{x}, \cdots, x^{(m-1)}, y, \dot{y}, \cdots, y^{(n-1)}). \end{cases} \tag{4}$$

方程 (3) 和方程组 (4) 称为是**已解出最高阶导数的方程**. 类似地定义具有任意个数未知函数的已解出最高阶导数的方程. 特别, §3 中的标准方程组 (1) 是已解出最高阶导数的方程. 今后, 我们几乎只研究已解出最高阶导数的方程.

现在我们证明, 任何已解出最高阶导数的 n 阶微分方程组都可以化成标准 n 阶方程组. 为此先给出把一个已解出最高阶导数的 n 阶方程化成 n 阶标准方程组.

(A) 设

$$y^{(n)} = f(t, y, \dot{y}, \cdots, y^{(n-1)}) \tag{5}$$

是一个已解出最高阶导数的 n 阶微分方程. 这里 t 是自变量, y 是变量 t 的未知函数. 此外, 函数 $f(t, y, \dot{y}, \cdots, y^{(n-1)})$ 是 $n+1$ 个变量 $t, y, \dot{y}, \cdots, y^{(n-1)}$ 的给定函数, 它定义在 $n+1$ 维坐标空间的某个开集 Γ 中. 关于函数 $f(t, y, \dot{y}, \cdots, y^{(n-1)})$, 我们假设它在集合 Γ 上连续, 以及它的偏导数

$$\frac{\partial f(t, y, \dot{y}, \cdots, y^{(n-1)})}{\partial y^{(k)}}, \quad k = 0, 1, \cdots, n-1,$$

(在此令 $y^{(0)} = y$) 也在集合 Γ 上连续. 为了把方程 (5) 变为标准方程组, 利用等式

$$x^1 = y, \quad x^2 = \dot{y}, \quad \cdots, \quad x^n = y^{(n-1)}, \tag{6}$$

引进变量 t 的新未知函数 $x^1, \cdots, x^n$. 于是方程 (5) 就等价于方程组

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = x^2, \\ \dot{x}^2 = x^3, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dot{x}^{n-1} = x^n, \\ \dot{x}^n = f(t, x^1, x^2, \cdots, x^n). \end{cases} \tag{7}$$

根据定理 2 由此得出, 对于集合 Γ 中的每一点 $t_0, y_0, \dot{y}_0, \cdots, y_0^{(n-1)}$, 存在着方程 (5) 满足**初始条件**

$$\psi^{(k)}(t_0) = y_0^{(k)}, \quad k = 0, 1, \cdots, n-1$$

的解 $y = \psi(t)$. 换句话说, 存在以

$$t_0\,,\ y_0\,,\ \dot{y}_0\,,\ \cdots,\ y_0^{(n-1)} \tag{8}$$

为**初始值**的解.

其次, 任何两个以 (8) 为初始值的解在它们定义区间的公共部分上是一样的. 如果方程 (5) 是线性的, 就是说, 函数 f 关于变量 $y, \dot{y}, \cdots, y^{(n-1)}$ 是线性的, 而它的系数在区间 $q_1 < t < q_2$ 上有定义并且是连续的, 那么对于任何初始值 $t_0, y_0, \dot{y}_0, \cdots, y_0^{(n-1)}$, 其中 $q_1 < t_0 < q_2$, 都存在着在整个区间 $q_1 < t < q_2$ 上有定义的解 $y = \psi(t)$.

我们来证明, 方程 (5) 等价于方程组 (7). 假设函数 y 满足方程 (5), 要证明由关系式 (6) 所确定的函数 $x^1, \cdots, x^n$ 满足方程组 (7); 对引进新未知函数 $x^1, \cdots, x^n$ 的关系式 (6) 求导, 我们得到

$$\dot{x}^k = y^{(k)}, \quad k = 1, \cdots, n-1, \tag{9}$$

$$\dot{x}^n = y^{(n)}. \tag{10}$$

根据关系式 (6) 来替换关系式 (9) 的右端, 根据函数 y 所满足的方程 (5) 来替换关系式 (10) 的右端, 我们就得到方程组 (7). 反之, 假设函数 $x^1, \cdots, x^n$ 满足方程组 (7); 并取 x^1 为 y, 我们来证明函数 y 满足方程 (5). 在方程组 (7) 的第一式中令 $x^1 = y$, 得到 $x^2 = \dot{y}$; 在第二式中令 $x^2 = \dot{y}$, 得到 $x^3 = \ddot{y}$. 继续这样做, 我们就导出关系式 (6), 最后, 在方程组 (7) 的最后一式中, 根据关系式 (6) 改变每一个函数 $x^1, \cdots, x^n$, 就得到关于 y 的方程 (5).

因为函数 f 在集合 Γ 上有定义, 所以方程组 (7) 的右端在按公式 (6) 进行坐标变换的条件下在集合 Γ 上也有定义. 在集合 Γ 上, 方程组 (7) 满足定理 2 的条件. 因此, 可以在集合 Γ 上任意选择初始值 $t_0, x_0^1, \cdots, x_0^n$, 根据变换 (6), 这些初始值变为方程 (5) 的初始值

$$t_0\,,\ y_0\,,\ \dot{y}_0\,,\ \cdots,\ y_0^{(n-1)}.$$

如果方程 (5) 是线性的, 那么方程组 (7) 也是线性的. 根据定理 3 由此推出命题 (A) 的最后部分. 于是就证明了命题 (A).

在命题 (A) 中所描述的方法给出了把任何已解出最高阶导数的微分方程变为标准方程组的可能性. 为了减少讨论的复杂性, 下面的命题 (B) 研究由两个方程构成的四阶方程组.

(B) 设

$$\begin{cases} \ddot{u} = f(t, u, \dot{u}, v, \dot{v}), \\ \ddot{v} = g(t, u, \dot{u}, v, \dot{v}) \end{cases} \tag{11}$$

是由两个二阶方程构成的方程组. 这里 t 是自变量, u 和 v 是 t 的未知函数. 按照如下的公式:

$$x^1 = u\,,\quad x^2 = \dot{u}\,,\quad x^3 = v\,,\quad x^4 = \dot{v}\,,$$

引进新的未知函数 x^1, x^2, x^3, x^4 后, 我们就把方程组 (11) 变成标准方程组. 在这个变换之下, 方程组 (11) 变成方程组

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = x^2\,, \\ \dot{x}^2 = f(t, x^1, x^2, x^3, x^4)\,, \\ \dot{x}^3 = x^4\,, \\ \dot{x}^4 = g(t, x^1, x^2, x^3, x^4)\,. \end{cases} \tag{12}$$

如果假设方程组 (11) 的右端函数 f 和 g, 在五维空间的某个开集 Γ 中有定义, 其中空间点的坐标是 $t, u, \dot{u}, v, \dot{v}$, 而且这些函数是连续的, 以及有关于 $u, \dot{u}, v, \dot{v}$ 的连续一阶偏导数, 那么方程组 (12) 是标准的, 且在集合 Γ 上满足定理 2 的条件. 由此容易得出, 对于集合 Γ 的任一点 $t_0, u_0, \dot{u}_0, v_0, \dot{v}_0$, 方程组 (11) 存在满足初始条件

$$\varphi(t_0) = u_0\,,\quad \dot{\varphi}(t_0) = \dot{u}_0\,,$$
$$\psi(t_0) = v_0\,,\quad \dot{\psi}(t_0) = \dot{v}_0$$

的解 $u = \varphi(t), v = \psi(t)$. 此外, 任何两个具有同样初始条件的解, 在它们存在区间的公共部分上是一样的.

命题 (B) 的证明和命题 (A) 的证明完全一样.

如果一个 n 阶的方程以形式

$$F(t, y, \dot{y}, \cdots, y^{(n)}) = 0 \tag{13}$$

给出, 也就是说还没有解出未知函数的最高阶导数 $y^{(n)}$, 那么首先产生的是关于解出 $y^{(n)}$ 的可能性问题. 可以认为, 这个问题与其说是属于微分方程领域不如说是属于函数论领域的问题. 可是在这里有某些问题被放到微分方程理论中来了. 它们带有下面的特征. 设方程 (13) 关于变量 $y^{(n)}$ 是二次的, 因此它确定 $y^{(n)}$ 为其余变量的**二值**函数. 要是两个值实际上不同的, 我们实质上就得到两个形如 (5) 的不同微分方程. 可是由方程 (13) 决定的变量 $y^{(n)}$ 的两个值并在一起了, 不可能分解成两个形式如 (5) 的方程, 这就不得不研究方程 (13). 这种方程的研究, 引向微分方程**奇解**的概念以及对曲面上微分方程的讨论. 但在本书中不讨论这些问题.

例题

1. 求解方程

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0\,, \tag{14}$$

其中 ω 为正常数.

直接验证, 函数

$$x = r\cos(\omega t + \alpha), \quad r \geqslant 0 \tag{15}$$

满足这个方程, 这里 r 和 α 是常数. 我们证明, 公式 (15) 包括了所有解. 设 $x = \varphi(t)$ 是方程 (14) 任意的解. 根据定理 3 (参看命题 (A) 的末尾), 可以认为 $x = \varphi(t)$ 对所有的 t 值有定义, 令 $\varphi(0) = x_0, \dot{\varphi}(0) = \dot{x}_0$. 直接验证, 我们可以选取常量 r 和 α, 使得等式 $r\cos\alpha = x_0, \quad -r\omega\sin\alpha = \dot{x}_0$ 成立. 如果这些等式成立, 那么解 (15) 和 $\varphi(t)$ 有相同的初始值 $0, x_0, \dot{x}_0$, 所以它们是一样的 (参看命题 (A)).

函数 (15) 描写的是**简谐振动过程**. 正的常数 r 称为振动 (15) 的**振幅**, 而 α 称为它的**初位相**或简称为**相**. 方程 (14) 称为简谐振动方程. 数 ω 称为振动的**频率**, 但单位时间振动的次数实际上是由公式

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi}$$

确定的.

2. 我们来讨论质量为 m 的质点 p 在力 F 的作用下沿水平直线 l 的运动, 设力 F 是沿同一直线指向点 O 的, 其大小与点 p 到点 O 的距离成正比. 为了写出点 p 的运动方程, 在直线 l 上取点 O 为原点后引进坐标. 以 $x = x(t)$ 表示点 p 的变动坐标. 于是根据牛顿第二定律, 点 p 的运动方程具有形式:

$$m\ddot{x} = F = -kx.$$

这个方程通常写成形式:

$$m\ddot{x} + kx = 0. \tag{16}$$

在物理上力 F 可以用某种弹簧来实现 (图 5). 数 k 叫做这弹簧的**弹性系数**. 根据公式 (15), 方程 (16) 的解具有形式:

$$x = r\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\ t + \alpha\right), \quad r \geqslant 0.$$

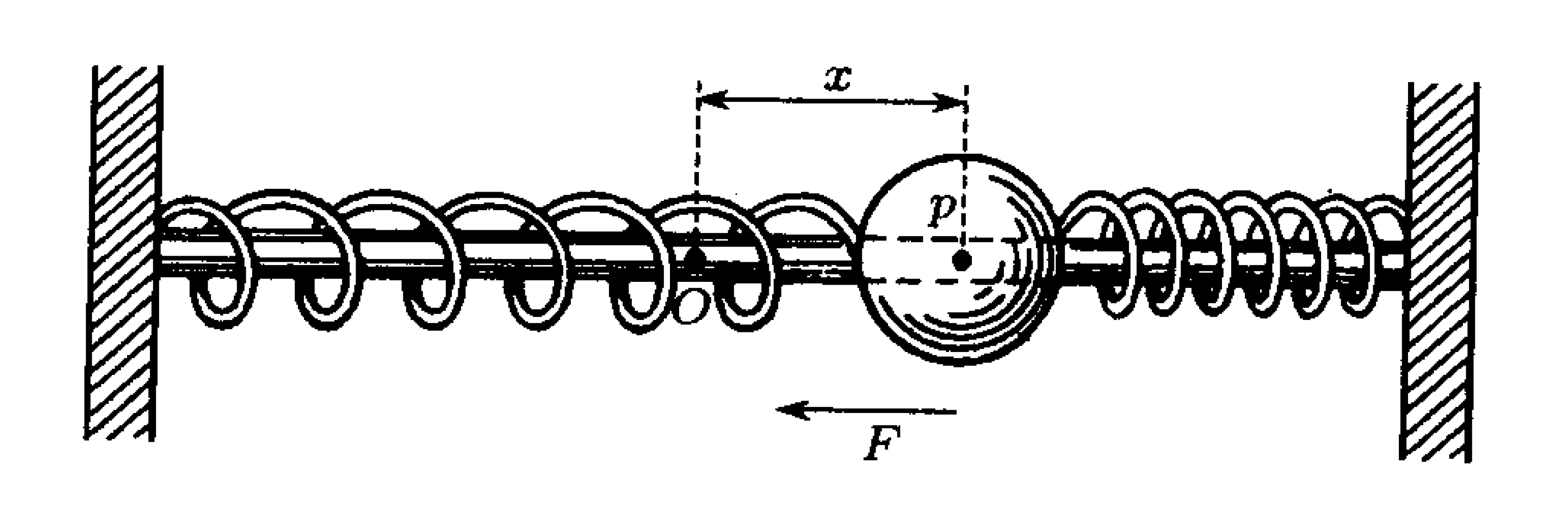


图 5

于是, 点 p 的振动频率 $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ 由它的质量 m 及弹簧的弹性系数 k 来决定, 而与初始条件无关. 振动的振幅 r 及其初相 α 与初始条件有关, 就是与时刻 $t = 0$ 时点 p 的位置 x_0 及其速度 $\dot{x}_0$ 有关.

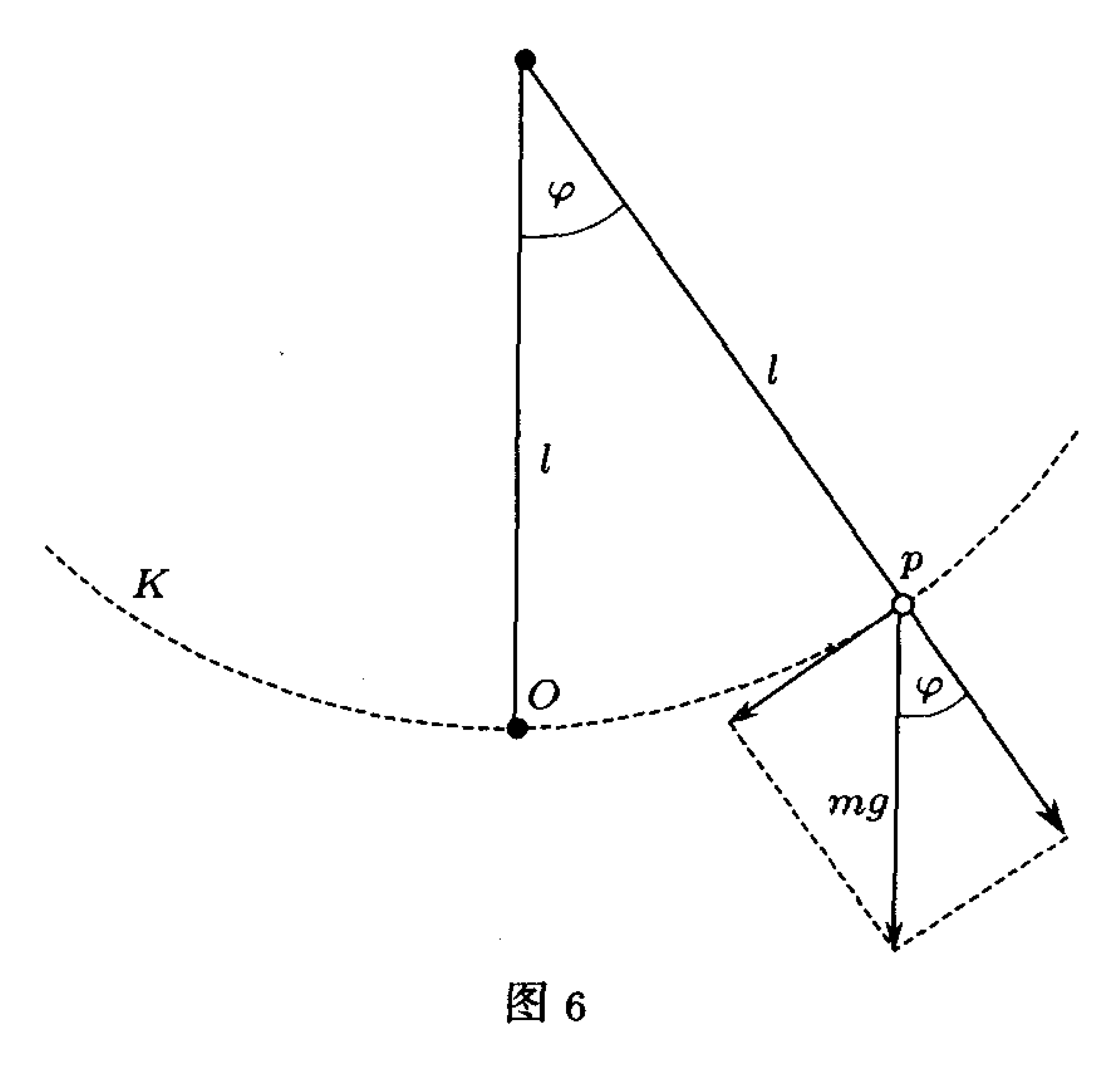


图 6

3. 我们来近似地建立并求解**数学摆**的方程. 数学摆乃是一个质量为 m 的质点 p, 在引力作用下沿着位于垂直平面中半径为 l 的圆周 K 而运动. 量 l 称为**摆长**. 取圆周 K 的最低点 O 作为坐标原点后, 在圆周 K 上引进角坐标 (图6). 以 $\varphi = \varphi(t)$ 表示点 p 的变动坐标; 作用于点 p 的引力 $P = mg$ 是垂直向下的. 这个力沿着圆周法线方向的分力由于约束 (圆周或者使质点沿圆周运动的线) 反作用力而相平衡; 这个力在点 p 处沿着圆周切线方向的分力等于 $-mg\sin\varphi$ (如果取角 φ 增加的方向作为正方向的话). 因此点 p 的运动方程有形式:

$$ml\ddot{\varphi} = -mg\sin\varphi,$$

或者写成

$$l\ddot{\varphi} + g\sin\varphi = 0. \tag{17}$$

这个方程是非线性的, 求它的解相当困难. 如果假设在运动过程中点 p 的坐标 φ 与零相差很小, 那么在方程 (17) 中可以用 φ 来代替 $\sin\varphi$, 于是得到摆的 "近似" 方程

$$l\ddot{\varphi} + g\varphi = 0.$$

它的解有形式 (参看 (15)):

$$\varphi = r\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t + \alpha\right).$$

因此, 摆的 "小振动" 频率由公式 $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$ 确定.

单位时间摆的小振动次数 ν 由公式

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}}$$

确定. 例如**秒摆**, 即一秒钟振动一次的摆 ($\nu = 1/$秒) 的长度由下式确定:

$$l = \frac{g}{4\pi^2} \approx 0.25\,米.$$

§5. 复值微分方程

直到现在, 我们只讨论了实值微分方程及其实解. 但是在某些情况下, 例如当求解常系数线性方程时, 先找出实微分方程的**复值解**, 然后再求出它的实解却较为容易. 为了讲述这个过程, 我们必须引进实变量的复值函数及复微分方程组的概念.

(A) 如果对于变量 t 在区间 $r_1 < t < r_2$ 上的每一个值, 有复数

$$\chi(t) = \varphi(t) + i\psi(t)$$

与之对应, 其中 $\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$ 是实变量 t 的实函数, 就称 $\chi(t)$ 为实变量 t 的**复值函数**, 而称函数 $\varphi(t)$ 为复值函数 $\chi(t)$ 的**实部**, 函数 $\psi(t)$ 为它的**虚部**. 如果函数 $\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$ 是连续的, 就说复值函数 $\chi(t)$ 是**连续的**. 同样, 如果函数 $\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$ 是可微的, 就说复值函数 $\chi(t)$ 是**可微的**, 它的导数 $\dot{\chi}(t)$ 由下式确定:

$$\dot{\chi}(t) = \dot{\varphi}(t) + i\dot{\psi}(t).$$

直接验证即知, 对于实变量的复值函数, 通常两个函数的和、积、商求导法则成立.

(B) 令

$$\dot{z}^j = h^j(t, z^1, \cdots, z^n), \quad j = 1, \cdots, n, \tag{1}$$

是标准的微分方程组. 假设方程右端的函数 $h^j(t, z^1, \cdots, z^n)$ 对于复变量 $z^1, \cdots, z^n$ 有定义. 例如, 我们可以限于讨论这些函数是变量 $z^1, \cdots, z^n$ 的多项式的情形, 这时它们的系数是实变量 t 在区间 $q_1 < t < q_2$ 上有定义的实的或者复的连续函数. 在这些条件下, 提出寻找方程组 (1) 的**复值解**问题是完全合理的. 对于给定在某一区间 $r_1 < t < r_2$ 上的实变量 t 的复值函数组

$$z^j = \chi^j(t), \quad j = 1, \cdots, n, \tag{2}$$

如果用公式 (2) 中变量 t 的函数代替 (1) 中的变量 z^j, 得到关于 t 在该区间上的一组恒等式, 就称 (2) 为方程组 (1) 的**解**. 因为根据假设, 方程组 (1) 的右端函数是 $z^1, \cdots, z^n$ 的多项式, 所以它们对这些复变量所有的值都有定义. 于是对于方程组 (1), 下面的存在和唯一性定理成立. 设

$$t_0,\ z_0^1,\ z_0^2,\ \cdots,\ z_0^n$$

是任意一组初始值, 其中 $z_0^1, \cdots, z_0^n$ 是任意的复数, 而 t_0 是任一满足条件 $q_1 < t_0 < q_2$ 的实数. 那么方程组 (1) 存在着满足初始条件

$$\chi^j(t_0) = z_0^j, \quad j = 1, \cdots, n$$

的解

$$z^j = \chi^j(t), \quad j = 1, \cdots, n;$$

而且任何两个满足同样初始条件的解在它们定义区间的公共部分上是一样的. 如果方程组 (1) 是线性的, 即多项式 h^j 是一次的, 那么对于任何初始值, 总存在方程组 (1) 定义在整个区间 $q_1 < t < q_2$ 上的解.

把每一个未知函数 z^j 分解为它的实部和虚部之后, 就可直接从定理 2 推出这条标准复方程组的存在和唯一性定理. 事实上, 令

$$z^j = x^j + iy^j, \quad j = 1, \cdots, n, \tag{3}$$

并在方程组 (1) 中以 (3) 代替变量 $z^j, j = 1, \cdots, n$, 于是我们就有

$$\dot{x}^j + i\dot{y}^j = f^j(t, x^1, \cdots, x^n, y^1, \cdots, y^n) + ig^j(t, x^1, \cdots, x^n, y^1, \cdots, y^n), \tag{4}$$

这里 f^j 和 g^j 都是实变量的实函数, 它们满足关系式

$$f^j(t, x^1, \cdots, x^n, y^1, \cdots, y^n) + ig^j(t, x^1, \cdots, x^n, y^1, \cdots, y^n)$$
$$= h^j(t, x^1 + iy^1, \cdots, x^n + iy^n).$$

由 (4) 得到

$$\begin{cases} \dot{x}^j = f^j(t, x^1, \cdots, x^n, y^1, \cdots, y^n), & j = 1, \cdots, n, \\ \dot{y}^j = g^j(t, x^1, \cdots, x^n, y^1, \cdots, y^n), & j = 1, \cdots, n. \end{cases} \tag{5}$$

于是, 标准复方程组 (1) 就由标准实方程组 (5) 所代替. 因为方程组 (1) 的右端是 $z^1, \cdots, z^n$ 的多项式, 所以方程组 (5) 的右端是 $x^1, \cdots, x^n$, $y^1, \cdots, y^n$ 的多项式; 又由于多项式 h^j 的系数是变量 t 在区间 $q_1 < t < q_2$ 上的连续函数, 所以多项式 f^j 和 g^j 的系数也是变量 t 在同一区间上的连续函数. 因此方程组 (5) 的右端在开集 Γ 中有定义且满足定理 2 的条件, 这里开集 Γ 是由加在 t 上的唯一条件 $q_1 < t < q_2$, 同时其他变量 $x^1, \cdots, x^n$ 和 $y^1, \cdots, y^n$ 仍然是任意的点 $(t, x^1, \cdots, x^n, y^1, \cdots, y^n)$ 所确定的集合. 设

$$z_0^j = x_0^j + iy_0^j, \quad j = 1, \cdots, n,$$
$$\chi^j(t) = \varphi^j(t) + i\psi^j(t), \quad j = 1, \cdots, n,$$

于是问题转变成寻找方程组 (5) 满足初始条件

$$\begin{cases} \varphi^j(t_0) = x_0^j, & j = 1, \cdots, n, \\ \psi^j(t_0) = y_0^j, & j = 1, \cdots, n \end{cases}$$

的解. 根据定理 2, 这样的解是存在的, 并且任何两个具有相同初始条件的解在它们定义区间的公共部分上是一样的.

如果方程组 (1) 是线性的, 那么方程组 (5) 也是线性的, 从而命题 (B) 后一部分结论就由定理 3 推出.

应当指出, 以变量 $z^1, \cdots, z^n$ 的多项式为右端的方程组 (1) 可能是**实的**, 即这些多项式的系数可能是变量 t 的实函数. 即使在这种情况下, 我们也可以把方程组 (1) 作为复方程讨论, 即认为函数 $z^1, \cdots, z^n$ 是复的, 而寻找它的复值解. 之所以要把这种方法应用于实方程组, 是由于在某些情况下, 求实方程组的复值解比求实值解更为容易. 在这种情况下, 我们先求出实方程组的复值解, 然后从复值解分出它的实值解, 亦即只讨论虚部为零的复值解. 下面我们就是要用这种方法来求解常系数线性方程.

像在实方程的情形一样, 也可以把非常一般的复值微分方程组化成标准方程组. 于是, 在复方程的情形下, 有类似于 §4 中命题 (A),(B) 的命题. 在此我们只叙述一个 n 阶方程式的存在和唯一性定理.

(C) 设

$$z^{(n)} = f(t, z, \dot{z}, \cdots, z^{(n-1)}) \tag{6}$$

是 n 阶方程, 它的右端是变量 $z, \dot{z}, \cdots, z^{(n-1)}$ 的多项式, 其系数是变量 t 在区间 $q_1 < t < q_2$ 上的实值或复值连续函数. 如果 $t_0, z_0, \dot{z}_0, \cdots, z_0^{(n-1)}$ 是任意的初始值, 其中 t_0 是满足不等式 $q_1 < t_0 < q_2$ 的实数, 而 $z_0, \dot{z}_0, \cdots, z_0^{(n-1)}$ 是任意的复数, 那么方程组 (6) 存在满足初始条件

$$\varphi(t_0) = z_0, \quad \dot{\varphi}(t_0) = \dot{z}_0, \quad \cdots, \quad \varphi^{(n-1)}(t_0) = z_0^{(n-1)}$$

的解 $z = \varphi(t)$, 而且任何两个具有相同初始条件的解, 在它们定义区间的公共部分上是一样的. 如果方程 (6) 是线性的, 即多项式 f 是一次的, 那么对任何初始值, 都存在着在整个区间 $q_1 < t < q_2$ 上有定义的解.

实变量 t 的复值函数 $e^{\lambda t}$ 在 §7 及其后面的章节中将起重要的作用, 其中 λ 是复数. 在此我们给出这个函数的定义, 并证明它的一些性质.

(D) 令 $w = u + iv$ 是一个任意的复数, 我们假设

$$e^w = e^u(\cos v + i\sin v)\,. \tag{7}$$

容易看出, 关系式

$$e^{\overline{w}} = \overline{e^w}$$

成立. 下面将证明公式

$$e^{w_1} e^{w_2} = e^{w_1 + w_2}\,. \tag{8}$$

从 (7) 直接得出著名的**欧拉公式**:

$$\cos v = \frac{e^{iv} + e^{-iv}}{2}, \quad \sin v \frac{e^{iv} - e^{-iv}}{2i}\,.$$

设 $\lambda = \mu + i\nu$ 是一个复数, 根据公式 (7) 我们有:

$$e^{\lambda t} = e^{\mu t}(\cos \nu t + i\sin \nu t)\,.$$

我们来证明, 对于复数 λ, 如下的求导公式

$$\frac{d}{dt}e^{\lambda t} = \lambda e^{\lambda t} \tag{9}$$

成立, 这一公式在 λ 为实参数值时我们是早已熟悉了.

我们在这里把公式 (7) 作为复变量 w 的函数 e^w 的**定义**, 但如果用级数

$$e^w = 1 + w + \frac{w^2}{2!} + \frac{w^3}{3!} + \cdots + \frac{w^n}{n!} + \cdots$$

来定义函数 e^w, 那么也可以证明公式 (7). 不过, 我们仍将认为 e^w 是用公式 (7) 定义的.

我们来证明公式 (8). 设

$$w_1 = u_1 + iv_1, \quad w_2 = u_2 + iv_2.$$

于是有

$$\begin{aligned} e^{w_1}e^{w_2} &= e^{u_1}(\cos v_1 + i\sin v_1)\,e^{u_2}(\cos v_2 + i\sin v_2) \\ &= e^{u_1+u_2}[\cos(v_1+v_2) + i\sin(v_1+v_2)] = e^{w_1+w_2}. \end{aligned}$$

现在证明公式 (9). 首先讨论 λ 是纯虚数 $i\nu$ 的情形, 我们有

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}e^{i\nu t} &= \frac{d}{dt}(\cos\nu t + i\sin\nu t) = -\nu\sin\nu t + i\nu\cos\nu t \\ &= i\nu(\cos\nu t + i\sin\nu t) = i\nu e^{i\nu t}. \end{aligned}$$

其次, 对任意的 $\lambda = \mu + i\nu$, 根据乘积的导数公式, 我们有

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}e^{\lambda t} &= \frac{d}{dt}(e^{\mu t}e^{i\nu t}) = \left(\frac{d}{dt}e^{\mu t}\right)e^{i\nu t} + e^{\mu t}\frac{d}{dt}e^{i\nu t} \\ &= \mu e^{\mu t}e^{i\nu t} + i\nu e^{\mu t}e^{i\nu t} = (\mu + i\nu)e^{(\mu+i\nu)t} = \lambda e^{\lambda t}. \end{aligned}$$

例题

1. 讨论复方程

$$\dot{z} = \lambda z, \tag{10}$$

其中 $z = x + iy$ 是实变量 t 的复值未知函数, 而 $\lambda = \mu + i\nu$ 是复数. 由 (9) 可知, 对任何复常数 c,

$$z = ce^{\lambda t} \tag{11}$$

是方程 (10) 的解. 我们来证明, 公式 (11) 包括了方程 (10) 所有的解. 为此, 像在 §1 的例 1 那样, 可以利用唯一性定理, 但现在我们利用定理 3, 为的是可以稍微简化计算. 这种简化在这里是无关紧要的, 但在以后类似这个方法可以给出更实质性的结果. 于是设 $z = \chi(t)$ 是方程 (10) 的任一解, 由于定理 3 (见命题 (C) 的最后一部分), 可以认

为这个解对所有的 t 值有定义. 令 $\chi(0)=z_0$, 我们看到解 $z=\chi(t)$ 本身有初始值 $0, z_0$. 而在 (11) 中令 $c=z_0$ 得到的解

$$z=z_0\,e^{\lambda t}$$

显然也有同样的初始值.

如果令 $c=re^{i\alpha}$,其中 $r>0$ 而 α 是实数, 那么解 (11) 可以写成形式

$$z=r\,e^{\lambda t+i\alpha}. \tag{12}$$

现在把方程 (10) 分解为实部和虚部, 我们有

$$\dot{x}+i\dot{y}=(\mu+i\nu)(x+iy)=(\mu x-\nu y)+i(\nu x+\mu y),$$

或者

$$\begin{cases}\dot{x}=\ \mu x-\nu y,\\ \dot{y}=\nu x+\mu y.\end{cases} \tag{13}$$

因此两个实的方程 (13) 就等价于一个复的方程 (10), 从而方程组 (13) 的任一组解 $x=\varphi(t), y=\psi(t)$ 与方程组 (10) 的任一解由关系式

$$\varphi(t)+i\psi(t)=re^{\lambda t+i\alpha}=r\Big[e^{\mu t}\cos(\nu t+\alpha)+ie^{\mu t}\sin(\nu t+\alpha)\Big],$$

联系起来, 由此得出

$$\begin{cases}x=\varphi(t)=\ re^{\mu t}\cos(\nu t+\alpha),\\ y=\psi(t)=re^{\mu t}\sin(\nu t+\alpha).\end{cases} \tag{14}$$

于是我们利用复值函数及复方程求出了实方程组 (13) 的解 (14).

2. 下面再举一个把复方程分解为两个实方程的例子. 设

$$\dot{z}=z^2+iz$$

是一个复方程, 其中 $z=x+iy$ 是实变量 t 的复值未知函数. 我们有

$$\dot{x}+i\dot{y}=(x+iy)^2+i(x+iy)=x^2-y^2-y+i(2xy+x),$$

所以

$$\begin{cases}\dot{x}=x^2-y^2-y,\\ \dot{y}=2xy+x.\end{cases}$$

§6. 关于线性微分方程的一些知识

如果在微分方程组中出现的所有未知函数以及它们的导数都是线性的, 那么就称这个方程组是**线性的**. 因此线性微分方程组的一般形式可写成

$$\sum_{j,k}a_{ijk}(t)(x^j)^{(k)}+b_i(t)=0,\quad i=1,\cdots,n. \tag{1}$$

这里$x^1,\cdots,x^n$是自变量t的未知函数，而方程的系数$a_{ijk}(t)$和自由项$b_i(t)$都是变量t的函数. 如果在方程组 (1) 中的所有自由项都恒等于零，那么就称方程组为**齐次的**. 从每一个线性方程组丢掉它的自由项，就得到一个与它相对应的线性齐次方程组. 所以，线性方程组 (1) 对应的线性齐次方程组是

$$\sum_{j,k} a_{ijk}(t)(y^j)^{(k)} = 0, \quad i = 1,\cdots,n. \tag{2}$$

我们指出线性方程组的一些可以直接验证的性质. 在下面对这些性质的叙述中，都将假设线性方程组的所有系数和自由项在区间$q_1 < t < q_2$上有定义且连续，所有讨论到的解都是在整个区间$q_1 < t < q_2$上给定的.

(A)　如果$y^i = \varphi^i(t)$和$y^i = \psi^i(t), i = 1,\cdots,n$是线性齐次方程组 (2) 的两个解，而$c_1$和$c_2$是两个任意常数，那么函数组

$$y^i = c_1\varphi^i(t) + c_2\psi^i(t), \quad i = 1,\cdots,n$$

也是齐次方程组 (2) 的解. 对于齐次方程组 (2) 的三个以及更多个数的解，类似的结论也正确.

(B)　设$x^i = \psi^i(t)$ 和$x^i = \chi^i(t), i = 1,\cdots,n$是线性方程组 (1) 的两个解，那么函数组

$$y^i = \chi^i(t) - \psi^i(t), \quad i = 1,\cdots,n$$

是齐次方程组 (2) 的解. 其次，如果$y^i = \varphi^i(t), i = 1,\cdots,n$是齐次方程组 (2) 的解，而$x^i = \psi^i(t), i = 1,\cdots,n$是线性方程组 (1) 的解，那么函数组

$$x^i = \varphi^i(t) + \psi^i(t), \quad i = 1,\cdots,n$$

是方程组 (1) 的解.

(C)　设线性方程组 (1) 的自由项是和的形式:

$$b_i(t) = \alpha c_i(t) + \beta d_i(t), \quad i = 1,\cdots,n;$$

除了方程组 (1) 之外，同时我们还考虑下列两个方程组:

$$\sum_{j,k} a_{ijk}(t)(x^j)^{(k)} + c_i(t) = 0, \quad i = 1,\cdots,n, \tag{3}$$

$$\sum_{j,k} a_{ijk}(t)(x^j)^{(k)} + d_i(t) = 0, \quad i = 1,\cdots,n. \tag{4}$$

如果$x^i = \psi^i(t), i = 1,\cdots,n$是方程组 (3) 的解，而 $x^i = \chi^i(t), i = 1,\cdots,n$是方程组 (4) 的解，那么函数组

$$x^i = \alpha\psi^i(t) + \beta\chi^i(t), \quad i = 1,\cdots,n$$

是方程组 (1) 的解.

第二章　常系数线性方程

常系数线性常微分方程组是很大和很重要的一类可以利用初等函数彻底求解的常微分方程. 由于这些方程的求解在原则上并不太困难, 因此时常认为它们在理论上没有多大用处, 在教科书中通常把它们放在一般线性方程理论中简单例题的地位. 其实常系数线性方程有许多技术上的应用, 因为由这些方程所描述的很多技术问题都用完全相同的方法在进行讨论; 正是这些技术应用对常系数线性方程理论提出了一系列新的理论性问题. 解决这些理论性问题需要做大量具有应用的方向性工作, 其中一些在这一章中有所反映. 例如: 在这一章中讲述了通常实际工程上使用的**算子法**, 它们对于用消去法求解方程组是很方便的; 关于线性方程组**解的稳定性**问题的研究, 它在自动控制理论中是很重要的. 此外, 还讲述了所谓的**复数振幅法**, 它是一个找出稳定特解很方便的方法, 而且在电路技术中有着广泛的应用.

在这里并不只限于解决实际中产生的纯数学问题, 还对电路理论简要地作了一些结论式的叙述. 电路设计从技术观点来看对本章所讲的数学方法的发展给出了很好和重要的实例.

此外, 在这一章中还包括了二阶线性系统相平面的研究, 它是自治系统 (一般来说是非线性) 的相空间研究基础. 自治系统的相空间在技术上也有着重要的应用.

由于所有上述的原因, 在本书中关于常系数线性方程这一章要比在一般常微分方程理论教科书中所占有的篇幅大得多. 这一章所有材料的讲述都是很初等的, 只有 § 14 是例外, 其中用到了矩阵的若尔当 (Jordan) 型. 所有利用若尔当型讲述的内容以后并不再用到, 因此正如在 § 14 中所详细指出那样, 是可以忽略过去的.

§7. 常系数线性齐次方程 (单根情形)

在这一节和下一节将要求解 n 阶常系数线性齐次方程, 即方程

$$z^{(n)}+a_1z^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}\dot{z}+a_nz=0\,, \tag{1}$$

其中 z 是自变量 t 的未知函数, 而系数 $a_1,\cdots,a_n$ 是 (实的或复的) 常数. 首先将求出这个方程的所有复值解, 然后 (在系数 $a_1,\cdots,a_n$ 是实的情况下) 要从这些解中分离出实的解来. 方程 (1) 可以写成形式:

$$z^{(n)}=-a_1z^{(n-1)}-\cdots-a_{n-1}\dot{z}-a_nz\,, \tag{2}$$

因此对它可应用存在和唯一性定理 (见 §5 命题 (C)). 下面将只用到唯一性定理, 因为方程 (2) 的解将要明显地求出来, 从而它的存在性自然就建立了; 唯一性将用于证明已经找到了所有的解.

在工程的应用中, 常系数常微分方程的**算子法**起了重要的作用. 这里我们利用**符号的**(或者换个叫法, **算子的**) **记法**, 它们是算子法的基础. 这些记法是: 任意函数 $z=z(t)$ 关于 t 的导数不记为 $\dfrac{d}{dt}z$, 而记为 pz, 因此在函数左边的字母 p 是关于 t **求导的符号**. 如果把求导符号 p 应用若干次我们就得到记法

$$\frac{d^kz}{dt^k}=p^kz\,.$$

利用这些记法, 我们可以写出

$$a_0z^{(n)}+a_1z^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}\dot{z}+a_nz=a_0p^nz+a_1p^{n-1}z+\cdots+a_{n-1}pz+a_nz\,.$$

如果现在允许把这个等式右边的函数 z 提出放在括弧后面, 就得到等式

$$a_0z^{(n)}+a_1z^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}\dot{z}+a_nz=(a_0p^n+a_1p^{n-1}+\cdots+a_{n-1}p+a_n)z\,.$$

于是, 我们得到形式上的定义.

(A) 设

$$L(p)=a_0p^n+a_1p^{n-1}+\cdots+a_{n-1}p+a_n$$

是符号 p 的任意 (实的或复的) 常系数多项式, 且 z 是实自变量 t 的某个实的或复的函数. 我们令

$$L(p)z=a_0z^{(n)}+a_1z^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}\dot{z}+a_nz\,. \tag{3}$$

如果 $L(p)$ 和 $M(p)$ 是符号 p (或者像通常所说的, **微分算子** p) 的两个任意多项式, 而 z,z_1,z_2 是变量 t 的函数, 那么容易看出, 我们有如下恒等式:

$$L(p)(z_1+z_2)=L(p)z_1+L(p)z_2\,,$$
$$(L(p)+M(p))z=L(p)z+M(p)z\,,$$
$$L(p)(M(p)z)=(L(p)M(p))z\,.$$

根据引进的记法, 方程 (1) 可以写成形式

$$L(p)z = 0\,, \tag{4}$$

其中

$$L(p) = p^n + a_1 p^{n-1} + \cdots + a_{n-1}p + a_n\,.$$

(B) 设 $L(p)$ 是符号 p 的任意多项式, 那么

$$L(p)e^{\lambda t} = L(\lambda)e^{\lambda t}\,. \tag{5}$$

我们来证明公式 (5). 显然有

$$pe^{\lambda t} = \lambda e^{\lambda t}$$

(见 §5 公式 (9)). 由此得到 $p^k e^{\lambda t} = \lambda^k e^{\lambda t}$. 因而立即推出公式 (5)(见 (3)).

从公式 (5) 得出, 函数 $e^{\lambda t}$ 是方程 (4) 的解, 当且仅当数 λ 是多项式 $L(p)$ 的根. 多项式 $L(p)$ 称为方程 (4) 的**特征多项式**. 在它没有重根的情况下, 方程 (4) 所有解的集合由如下定理来描述.

定理 4 *假设方程 (见 (1) 和 (4))*

$$L(p)z = 0 \tag{6}$$

的特征多项式 $L(p)$ 没有重根, 并用 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 记它的 n 个根. 令

$$z_1 = e^{\lambda_1 t}, \quad z_2 = e^{\lambda_2 t}, \quad \cdots, \quad z_n = e^{\lambda_n t}; \tag{7}$$

那么对于任意复常数 $c^1, c^2, \cdots, c^n$, 函数

$$z = c^1 z_1 + c^2 z_2 + \cdots + c^n z_n \tag{8}$$

也是方程 (6) 的解. 这个解在这样意义下是方程 (6) 的通解, 即方程 (6) 的每一个解, 都可以在常数 $c^1, c^2, \cdots, c^n$ 的适当选取之下从公式 (8) 得到. 同时对每一个给定的解 z, 常数 $c^1, c^2, \cdots, c^n$ (称为积分常数) 是唯一地确定的.

我们注意到函数 (7) 是定义在整个数轴 $-\infty < t < +\infty$ 上的.

证明 从公式 (5) 推知函数组 (7) 中的每个函数都是方程 (6) 的解, 因而由方程 (6) 的线性齐次性推出 (参看 §6,(A)), 对任意复的常数 $c^1, \cdots, c^n$, 公式 (8) 给出方程 (6) 的解. 我们证明, 如果 $z_* = z_*(t)$ 是方程 (6) 的任意一个解, 那么它可以写成 (8) 的形状. 根据 §5 中命题 (C), 我们可以假定解 $z_*(t)$ 是在整个直线 $-\infty < t < +\infty$ 上有定义的. 令

$$z_*(0) = z_0, \quad \dot{z}_*(0) = \dot{z}_0, \quad \cdots, \quad z_*^{(n-1)}(0) = z_0^{(n-1)}.$$

现在证明, 可以选择常数 $c^1, \cdots, c^n$, 使得由 (8) 式确定的解 $z(t)$ 满足相同的初始条件

$$z(0) = z_0, \quad \dot{z}(0) = \dot{z}_0, \cdot \cdots, \quad z^{(n-1)}(0) = z_0^{(n-1)}. \tag{9}$$

把公式 (8) 的函数 z 代入方程 (9), 得到

$$c^1 z_1^{(s)}(0) + \cdots + c^n z_n^{(s)}(0) = z_0^{(s)}, \quad s = 0, 1, \cdots, n-1, \tag{10}$$

关系式 (10) 是含未知量 $c^1, \cdots, c^n$ 的 n 个线性方程的方程组. 为了 (10) 有解, 只要下面矩阵的行列式不等于零就行了:

$$\begin{bmatrix} z_1(0) & z_2(0) & \cdots & z_n(0) \\ \dot{z}_1(0) & \dot{z}_2(0) & \cdots & \dot{z}_n(0) \\ \ddot{z}_1(0) & \ddot{z}_2(0) & \cdots & \ddot{z}_n(0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ z_1^{(n-2)}(0) & z_2^{(n-2)}(0) & \cdots & z_n^{(n-2)}(0) \\ z_1^{(n-1)}(0) & z_2^{(n-1)}(0) & \cdots & z_n^{(n-1)}(0) \end{bmatrix}. \tag{11}$$

直接看出, 矩阵 (11) 有形式

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{(n-1)} & \lambda_2^{(n-1)} & \cdots & \lambda_n^{(n-1)} \end{bmatrix},$$

由于所有特征根 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是两两不同的, 所以这个行列式 (即范德蒙德 (Vandermonde) 行列式) 不等于零. 但是我们要给出矩阵 (11) 的行列式不等于零的另一个 (直接的) 证明, 这个证明将在下面推广到重根的情形.

如果矩阵 (11) 的行列式等于零, 那么它们各行之间就存在线性关系. 我们假设, 这样的线性关系成立, 那么就存在不同时等于零的常数 $b_{n-1}, b_{n-2}, \cdots, b_0$, 使得当把它们依次乘矩阵 (11) 的各行并相加起来时, 就得到一行零. 把这行零的第 k 项写出来, 就得到

$$b_{n-1} z_k(0) + b_{n-2} \dot{z}_k(0) + \cdots + b_1 z_k^{(n-2)}(0) + b_0 z_k^{(n-1)}(0) = 0. \tag{12}$$

如果用 $M(p)$ 来记多项式 $b_0 p^{n-1} + b_1 p^{n-2} + \cdots + b_{n-2} p + b_{n-1}$, 那么关系式 (12) 可写成形式:

$$M(p) z_k|_{t=0} = 0.$$

由于公式 (5) 和 (7), 由此得到

$$M(\lambda_k) = 0,$$

而这是不可能的, 因为多项式 $M(p)$ 的次数不超过 $n-1$, 所以不可能有 n 个不同的根 $\lambda_1, \cdots, \lambda_k, \cdots, \lambda_n$. 得到的矛盾说明了方程组 (10) 的行列式不等于零, 因此可以 (而且唯一地) 选取常数 $c^1, c^2, \cdots, c^n$, 使得 $z_*(t)$ 和 $z(t)$ 满足同一组初始条件. 这些常数在这样 (且只在这样) 的选取之下, 解 (8) 就是给定的解 $z_*(t)$. 于是定理 4 得证.

如果出现在方程 (6) 中的多项式 $L(p)$ 的系数是实数, 那么就产生从所有复值解的总体 (8) 中分出实解的问题.

这个问题的解决要依赖于命题 (D), 在叙述和证明这个命题时, 我们要用到向量的记法, 在这里我们把它们重提一下.

(C) 由 n 个数组成的序列:

$$\boldsymbol{u} = (u^1, u^2, \cdots, u^n),$$

称为 n 维空间的**向量**. 这里 $\boldsymbol{u}$ 是向量, 而 $u^1, u^2, \cdots, u^n$ 是数, 它们称为向量的**坐标**. 向量常用黑体字标明. 如果向量的坐标是实数, 那么就认为向量是**实的**, 如果它的坐标是复数, 那么就认为向量本身是**复的**. 向量 $\boldsymbol{u}$ 的**共轭向量** $\overline{\boldsymbol{u}}$ 由等式

$$\overline{\boldsymbol{u}} = (\overline{u^1}, \overline{u^2}, \cdots, \overline{u^n})$$

定义. 显然, 向量 $\boldsymbol{u}$ 当且仅当

$$\overline{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{u}$$

时才是实的. 向量 $\boldsymbol{u} = (u^1, u^2, \cdots, u^n)$ 与实数或复数 α 的**乘积**由

$$\alpha\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}\alpha = (\alpha u^1, \alpha u^2, \cdots, \alpha u^n)$$

定义. 向量

$$\boldsymbol{u} = (u^1, u^2, \cdots, u^n) \quad 与 \quad \boldsymbol{v} = (v^1, v^2, \cdots, v^n)$$

的**和**由公式

$$\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = (u^1 + v^1, u^2 + v^2, \cdots, u^n + v^n)$$

定义. 所有坐标等于零的向量 **0** 称为**零向量** (也用 0, 表示).

令

$$\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{u}_r$$

是一个有限个向量的向量组. 如果有关系式

$$\alpha^1\boldsymbol{u}_1 + \alpha^2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + \alpha^r\boldsymbol{u}_r = 0$$

成立, 其中 $\alpha^1, \alpha^2, \cdots, \alpha^r$ 是不全为零的常数, 那么就称向量 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_r$ 是**线性相关的**. 如果这些向量不存在线性相关, 那么就称它们是**线性无关的**. 设

$$\boldsymbol{u}_j = (u_j^1, \cdots, u_j^n), \quad j = 1, \cdots, r.$$

数 u_j^i 构成矩阵 (u_j^i), $i = 1, \cdots, n$; $j = 1, \cdots, r$. 如果假定上指标 i 表示行的号码, 下指标 j 表示列的号码, 那么矩阵 (u_j^i) 有高 n 和宽 r. 因此, 向量 $\boldsymbol{u}_j$ 在矩阵 (u_j^i) 中对应于第 j 列 (这一列由这个向量的坐标组成). 由此看出, 向量 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_r$ 的线性相关性对应于矩阵 (u_j^i) 列向量的线性相关性. 在 $r = n$ 的情况下, 矩阵 (u_j^i) 就成为一个方阵, 而向量 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_r$ 当且仅当这个矩阵的行列式不等于零时才是线性无关的.

(D) 设

$$\boldsymbol{z}_1, \ \boldsymbol{z}_2, \ \cdots, \ \boldsymbol{z}_n \tag{13}$$

是 n 维空间中的 n 个线性无关的复向量组. 我们假设, 组 (13) 在含有每一个向量的同时, 也包含了它的共轭复向量. 在这个假设之下, 由公式

$$\boldsymbol{z} = c^1\boldsymbol{z}_1 + \cdots + c^n\boldsymbol{z}_n \tag{14}$$

所确定的向量 $\boldsymbol{z}$ 是实的, 当且仅当相互共轭的向量前面的系数相互共轭, 实向量的系数为实数.

我们来证明这个命题. 为了确定起见, 假定满足关系式:

$$\begin{cases} \overline{\boldsymbol{z}_1} = \boldsymbol{z}_2, & \cdots, \quad \overline{\boldsymbol{z}_{2k-1}} = \boldsymbol{z}_{2k}, \\ \overline{\boldsymbol{z}_j} = \boldsymbol{z}_j, & j = 2k+1, \ \cdots, \ n. \end{cases}$$

那么按照 (14) 式, 向量 $\boldsymbol{z}$ 有形式:

$$\boldsymbol{z} = c^1\boldsymbol{z}_1 + c^2\boldsymbol{z}_2 + \cdots + c^{2k-1}\boldsymbol{z}_{2k-1} + c^{2k}\boldsymbol{z}_{2k} + c^{2k+1}\boldsymbol{z}_{2k+1} + \cdots + c^n\boldsymbol{z}_n, \tag{15}$$

而向量 $\overline{\boldsymbol{z}}$ 成为:

$$\overline{\boldsymbol{z}} = \overline{c^2}\boldsymbol{z}_1 + \overline{c^1}\boldsymbol{z}_2 + \cdots + \overline{c^{2k}}\boldsymbol{z}_{2k-1} + \overline{c^{2k-1}}\boldsymbol{z}_{2k} + \overline{c^{2k+1}}\boldsymbol{z}_{2k+1} + \cdots + \overline{c^n}\boldsymbol{z}_{2n}. \tag{16}$$

如果

$$c^1 = \overline{c^2}, \cdots, c^{2k-1} = \overline{c^{2k}}, c^{2k+1} = \overline{c^{2k+1}}, \cdots, c^n = \overline{c^n}, \tag{17}$$

那么由等式 (15),(16) 得出 $\overline{\boldsymbol{z}} = \boldsymbol{z}$, 即向量 $\boldsymbol{z}$ 是实的. 反之, 如何假设向量 $\boldsymbol{z}$ 是实的, 亦即 $\overline{\boldsymbol{z}} = \boldsymbol{z}$, 那么等式 (15) 和 (16) 就给出 (由于向量组 (13) 的线性无关性) 关系式组 (17). 于是命题 (D) 得证.

当多项式 $L(p)$ 的系数是实的情形时, 下面的命题 (E) 给出从方程 (6) 所有复值解的集合中分出实解的方法.

(E) 假设多项式 $L(p)$ 的系数是实的, 那么多项式 $L(p)$ 除了每一个复数根 λ 之外, 也还有共轭于它的根 $\overline{\lambda}$. 方程 (6) 的解 $e^{\lambda t}$ 和 $e^{\overline{\lambda}t}$ 是互相共轭的 (参看 §5 (D)). 如果根 λ 是实的, 那么 $e^{\lambda t}$ 也是实的. 因此在解组 (7) 中除了每个解外, 也含有与它复共轭的解. 为了使得方程 (6) 的解 (8) 是实的, 必要和充分的条件是: 复共轭解的系数是相互共轭的, 实解的系数是实的.

为了证明命题 (E) , 我们用 $\boldsymbol{z}_k$ 记坐标为 $\{z_k(0), \dot{z}_k(0), \cdots, z_k^{(n-1)}(0)\}$ 的向量, 而用 $\boldsymbol{z}$ 记坐标为 $\{z_0, \dot{z}_0, \cdots, z_0^{(n-1)}\}$ 的向量. 那么关系式 (10) 取形式

$$c^1\boldsymbol{z}_1 + c^2\boldsymbol{z}_2 + \cdots + c^n\boldsymbol{z}_n = \boldsymbol{z}.$$

由于矩阵 (11) 的行列式不为零, 所以向量 $\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}, \cdots, \boldsymbol{z}_n$ 是线性无关的. 因此, (E) 中所给出条件的必要性从 (D) 立即得出. 另一方面, 如果这个条件满足, 那么解 (8) 是实的. 事实上, 如果 λ_1 和 λ_2 是一对复共轭根, 而 c^1 和 c^2 是两个复共轭的常数, 那么函数 $c^1e^{\lambda_1 t}$ 和 $c^2e^{\lambda_2 t}$ 也是复共轭的, 从而它们的和是实的. 于是命题 (E) 得证.

例题

1. 求出方程

$$z^{(3)} - 3\ddot{z} + 9\dot{z} + 13z = 0$$

的所有复值解. 它可以写成 (6) 的形式, 其中

$$L(p) = p^3 - 3p^2 + 9p + 13.$$

直接验证即知, $p = -1$ 是特征多项式 $L(p)$ 的根, 用 $p + 1$ 来除 $L(p)$, 即得

$$L(p) = (p + 1)(p^2 - 4p + 13),$$

由此求得另外两个根为 $2 \pm 3i$. 于是多项式 $L(p)$ 所有的根是数

$$\lambda_1 = 2 + 3i, \quad \lambda_2 = 2 - 3i, \quad \lambda_3 = -1.$$

根据定理 4 , 所讨论方程的复通解有形式:

$$z = c^1e^{(2+3i)t} + c^2e^{(2-3i)t} + c^3e^{-t}.$$

在下面的例 2 和例 3 中给出两个分出实解的一般规则, 这些规则直接从命题 (E) 推出.

2. 我们假设解组 (7) 满足条件

$$\overline{z_1} = z_2, \cdots, \overline{z_{2k-1}} = z_{2k}, \overline{z_{2k+1}} = z_{2k+1}, \cdots, \overline{z_n} = z_n, \tag{18}$$

并令

$$z_1 = x_1 + iy_1, \cdots, z_{2k-1} = x_k + iy_k,$$

其中 $x_1, \cdots, x_k, y_1, \cdots, y_k$ 是实函数. 其次, 假设数 $c^1, c^2, \cdots, c^n$ 满足条件 (17), 再令

$$c^1 = \frac{1}{2}(a^1 - ib^1), \quad \cdots, \quad c^{2k-1} = \frac{1}{2}(a^k - ib^k),$$

这里 $a^1 \cdots, a^k, b^1, \cdots, b^k$ 是实数. 在这些记号下, 方程 (6) 的实通解写成形式:

$$z = a^1 x_1 + b^1 y_1 + \cdots + a^k x_k + b^k y_k + c^{2k+1} z_{2k+1} + \cdots + c^n z_n,$$

其中

$$a^1, b^1, \cdots, a^k, b^k, c^{2k+1}, \cdots, c^n$$

是任意的实数.

3. 我们仍旧假设解 (7) 满足条件 (18); 令

$$\lambda_1 = \mu_1 + i\nu_1, \cdots, \lambda_{2k-1} = \mu_k + i\nu_k.$$

在数 $c^1, c^2, \cdots, c^n$ 满足条件 (17) 的假设下, 我们可以设

$$c^1 = \frac{1}{2}\rho_1 e^{i\alpha_1}, \quad \cdots, \quad c^{2k-1} = \frac{1}{2}\rho_k e^{i\alpha_k}.$$

在这些记号下, 每一个实解 z 写成形式:

$$z = \rho_1 e^{\mu_1 t}\cos(\nu_1 t + \alpha_1) + \cdots + \rho_k e^{\mu_k t}\cos(\nu_k t + \alpha_k) + c^{2k+1} e^{\lambda_{2k+1} t} + \cdots + c^n e^{\lambda_n t},$$

其中 $\rho_1, \cdots, \rho_k$, $\alpha_1, \cdots, \alpha_k$, $c^{2k+1}, \cdots, c^n$ 是任意实常数. 从最后的写法看出, 每一个根 λ_j 的虚部 $\nu_j \neq 0$ 给出有频率为 ν_j 的振动特性的解, 而根 λ_j 的实部 μ_j 使得解或是增大 (当 $\mu_j > 0$), 或是减小 (当 $\mu_j < 0$).

4. 利用例题 2 和例题 3 中的结论, 我们可以把在例题 1 中所考虑方程的一切实解用下列两种形式写出:

$$z = a^1 e^{2t}\cos 3t + b^1 e^{2t}\sin 3t + c^3 e^{-t},$$
$$z = \rho_1 e^{2t}\cos(3t + \alpha_1) + c^3 e^{-t}.$$

§8. 常系数线性齐次方程 (重根情形)

如果方程

$$L(p)z = 0 \tag{1}$$

的特征多项式

$$L(p) = p^n + a_1 p^{n-1} + \cdots + a_{n-1} p + a_n$$

(参看 §7 (A)) 有重根, 那么在形状为 $e^{\lambda t}$ 的函数中不可能求出方程 (1) 的 n 个不同的解. 为了在这种情况下找到其他形式的解, 可以利用下面的启发性设想. 设 λ_1 和 λ_2 是

特征多项式 $L(p)$ 的两个不同的实根, 那么函数 $\dfrac{e^{\lambda_1 t}-e^{\lambda_2 t}}{\lambda_1-\lambda_2}$ 是方程 (1) 的解. 如果现在假设, 变动多项式 $L(p)$ 的系数, 使得数 λ_2 趋向于 λ_1, 那么这个解 (取极限) 过渡到函数 $te^{\lambda_1 t}$, 很自然地料想到它就是方程 (1) 在 λ_1 是多项式 $L(p)$ 的二重根时的解. 类似地我们来推测, 如果 λ 是特征多项式 $L(p)$ 的 k 重根, 那么所有的函数

$$e^{\lambda t}, te^{\lambda t}, \cdots, t^{k-1}e^{\lambda t}$$

都是方程 (1) 的解. 把这个猜想推广到多重复根的情形, 我们得到有关下面定理 (它是定理 4 的推广) 正确性的推测.

定理 5 假设

$$L(p)z = 0 \tag{2}$$

是 n 阶常系数线性齐次方程. 其次令 $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$ 是方程 (2) 的特征多项式 $L(p)$ 所有两两不同根的集合, 而且 λ_j 的重数为 k_j, 因此 $k_1+\cdots+k_m = n$. 令

$$\begin{cases} z_1 = e^{\lambda_1 t}, \quad z_2 = te^{\lambda_1 t}, \quad \cdots, \quad z_{k_1} = t^{k_1-1}e^{\lambda_1 t}; \\ z_{k_1+1} = e^{\lambda_2 t}, z_{k_1+2} = te^{\lambda_2 t}, \quad \cdots, z_{k_1+k_2} = t^{k_2-1}e^{\lambda_2 t}; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \quad z_n = t^{k_m-1}e^{\lambda_m t}. \end{cases} \tag{3}$$

那么所有的函数 (3) 都是方程 (2) 的解, 因此, 对任意的复常数 $c^1, c^2, \cdots, c^n$, 函数

$$z = c^1 z_1 + \cdots + c^n z_n \tag{4}$$

也是这个方程的解. 这个解在那样的意义下是 (2) 的通解, 即方程 (2) 的每个解都可以通过适当地选取常数 $c^1, \cdots, c^n$ 而由公式 (4) 得到. 这时对于每个给定的解 z 来说, 常数 $c^1, \cdots, c^n$ 是唯一确定的.

于是, 函数组 (3) 构成了方程 (2) 的所谓**基本解组** (见 § 18 (C)). 我们注意到, 函数 (3) 是定义在整个数轴 $-\infty < t < +\infty$ 上的.

在证明定理 5 之前, 先证明**平移公式**.

(A) 设 $L(p)$ 是任意的多项式, λ 是任意复数, 而 $f(t)$ 是足够次数可微的函数. 那么下面的重要公式:

$$L(p)(e^{\lambda t}f(t)) = e^{\lambda t}L(p+\lambda)f(t) \tag{5}$$

成立.

我们来证明公式 (5). 首先我们对 $L(p) \equiv p$ 的情形来验证它. 我们有

$$p(e^{\lambda t}f(t)) = \lambda e^{\lambda t}f(t) + e^{\lambda t}\dot{f}(t) = e^{\lambda t}(p+\lambda)f(t).$$

现在容易对任意的一阶多项式 $L(p) = ap + b$ 来验证公式 (5). 我们有

$$\begin{aligned}(ap+b)(e^{\lambda t}f(t)) &= ap(e^{\lambda t}f(t)) + be^{\lambda t}f(t)\\ &= ae^{\lambda t}(p+\lambda)f(t) + be^{\lambda t}f(t) = e^{\lambda t}[a(p+\lambda)+b]f(t).\end{aligned}$$

在一般情况下, 公式 (5) 的证明可以按多项式 $L(p)$ 的幂次 n 进行归纳. 对于 $n = 1$, 我们已看到公式 (5) 是成立的. 假设它对于 $n-1(n \geqslant 2)$ 次幂的多项式已成立, 我们来证明它对于 n 次多项式 $L(p)$ 也成立. 对于这个 n 次多项式 $L(p)$, 我们把它分解为两个因子 $L(p) = L_1(p)L_2(p)$, 其中 $L_1(p)$ 的次数为 1, 而 $L_2(p)$ 是 $n-1$ 次的. 因为对于 $L_1(p)$ 和 $L_2(p)$ 的每一个多项式, 公式 (5) 都是成立的, 所以我们有 (见 §7 (A)):

$$\begin{aligned}L(p)(e^{\lambda t}f(t)) &= L_1(p)(L_2(p)(e^{\lambda t}f(t)))\\ &= L_1(p)(e^{\lambda t}L_2(p+\lambda)f(t))\\ &= e^{\lambda t}L_1(p+\lambda)L_2(p+\lambda)f(t) = e^{\lambda t}L(p+\lambda)f(t).\end{aligned}$$

于是, 公式 (5) 得证.

我们现在来证明命题 (B), 定理 5 几乎完全被包含在这个命题里.

(B) 假设 $L(p)$ 是关于符号 p 的任意多项式, 而令实变量 t 的函数 $\omega_r(t)$ 用公式

$$\omega_r(t) = L(p)t^r e^{\lambda t}$$

定义, 其中 λ 为复数. 于是, 如果 λ 是多项式 $L(p)$ 的 k 重根, 那么函数 $\omega_0(t), \cdots, \omega_{k-1}(t)$ 恒等于零. 另一方面, 如果函数 $\omega_0(t), \cdots, \omega_{k-1}(t)$ 至少对一个 $t = t_0$ 的值等于零, 即等式

$$\omega_0(t_0) = \omega_1(t_0) = \cdots = \omega_{k-1}(t_0) = 0 \tag{6}$$

成立, 那么 λ 是多项式 $L(p)$ 的根, 而且这个根的重数不小于 k.

我们来证明命题 (B).

由于平移公式 (见 (5)), 我们有

$$\omega_r(t) = e^{\lambda t}L(p+\lambda)t^r. \tag{7}$$

我们首先假设 λ 是多项式 $L(p)$ 的 k 重根, 即

$$L(p) = M(p)(p-\lambda)^k.$$

在这个恒等式中将 p 换成 $p+\lambda$, 我们得到:

$$L(p+\lambda) = M(p+\lambda)p^k. \tag{8}$$

从公式 (7) 和 (8), 得出

$$\omega_r(t) = e^{\lambda t}M(p+\lambda)(p^k t^r) = 0, \quad 当 r = 0, 1, \cdots, k-1,$$

这是因为当 $r < k$ 时, $p^k t^r = 0$. 因此, 命题 (B) 的第一部分得证.

现在假设关系式 (6) 成立. 把 $L(p+\lambda)$ 按 p 的幂次展开, 即得:

$$L(p+\lambda) = b_0 + b_1 p + \cdots + b_{n-1}p^{n-1} + b_n p^n . \tag{9}$$

从关系式 (7) 和 (9) 得到:

$$\omega_0(t_0) = e^{\lambda t_0} b_0 ,$$

而根据 (6) 式, 这就给出

$$b_0 = 0 .$$

现在假设等式

$$b_0 = b_1 = \cdots = b_{r-1} = 0, \quad r \leqslant k-1 \tag{10}$$

成立, 我们来证明 $b_r = 0$. 由 (7),(9) 及 (10), 我们有:

$$\omega_r(t_0) = e^{\lambda t_0} r! b_r .$$

根据 (6), 由此推出

$$b_r = 0 .$$

因此, $b_0 = b_1 = \cdots = b_{k-1} = 0$, 而多项式 $L(p+\lambda)$ 有形式:

$$L(p+\lambda) = b_k p^k + \cdots + b_n p^n = (b_k + \cdots + b_n p^{n-k})p^k = M_1(p)p^k .$$

在这个恒等式中将 p 换为 $p-\lambda$, 我们得到:

$$L(p) = M_1(p-\lambda)\cdot(p-\lambda)^k .$$

这就证明了 λ 是多项式 $L(p)$ 的根, 并且它的重数不小于 k. 于是命题 (B) 得证.

定理 5 的证明 从命题 (B) 的第一部分立即得到, 在定理的叙述中给出的函数组 (3) 都是方程 (2) 的解. 我们证明, 用适当的方法选取常数 $c^1, \cdots, c^n$, 可以按照公式 (4) 得到方程 (2) 的任意解 z_* (这时不同于在证明定理 4 时曾做过的那样, 在此将不用定理 3).

设 z_* 是方程 (2) 定义在某区间 $r_1 < t < r_2$ 上的任意一个解, 并令 t_0 是这个区间上的某个数. 我们假设

$$z_*(t_0) = z_0, \quad \dot{z}_*(t_0) = \dot{z}_0, \quad \cdots, \quad z_*^{(n-1)}(t_0) = z_0^{(n-1)} .$$

现在我们要找出这样的常数 $c^1, \cdots, c^n$, 使得方程 (2) 由公式 (4) 所确定的解 z 和给定的解 z_* 有相同的初始条件. 于是由唯一性定理我们就有 $z = z_*$ (在区间 $r_1 < t < r_2$ 上). 为了确定常数 $c^1, \cdots, c^n$, 我们得到方程组

$$c^1 z_1^{(s)}(t_0) + c^2 z_2^{(s)}(t_0) + \cdots + c^n z_n^{(s)}(t_0) = z_0^{(s)}, \quad s = 0, 1, \cdots, n-1 . \tag{11}$$

为了使得方程组 (11) 是可解的, 只需矩阵

$$\begin{bmatrix} z_1(t_0) & z_2(t_0) & \cdots & z_n(t_0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ z_1^{(s)}(t_0) & z_2^{(s)}(t_0) & \cdots & z_n^{(s)}(t_0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ z_1^{(n-1)}(t_0) & z_2^{(n-1)}(t_0) & \cdots & z_n^{(n-1)}(t_0) \end{bmatrix} \tag{12}$$

的行列式不为零就行了. 我们来证明这个行列式不等于零. 为此, 我们证明矩阵 (12) 的行是线性无关的. 假定与此相反, 并令 $b_{n-1}, b_{n-2}, \cdots, b_0$ 是这样的一些常数, 它们不同时等于零, 而且在用这些常数顺序乘矩阵的第一、第二以及其他各行后, 使得它们的和等于零. 写出第 j 列元素的求和式, 我们得到等式

$$b_0 z_j^{(n-1)}(t_0) + b_1 z_j^{(n-2)}(t_0) + \cdots + b_{n-2}\dot{z}_j(t_0) + b_{n-1}z_j(t_0) = 0,$$

它可以重写成形式:

$$M(p)z_j|_{t=t_0} = 0, \tag{13}$$

这里 $M(p) = b_0p^{n-1} + b_1p^{n-2} + \cdots + b_{n-2}p + b_{n-1}$. 对于 $j = 1, \cdots, k_1$, 所得到的等式 (13) 说明 λ_1 至少是多项式 $M(p)$ 的 k_1 重根 (参看命题 (B)). 完全一样地, 对 $j = k_1+1, \cdots, k_1+k_2$, 所得到的等式给出 λ_2 至少是 $M(p)$ 的 k_2 重根. (13) 的所有等式全体使我们得出结论, 多项式 $M(p)$ 有不少于 n 个的根 (有几重就算几个), 但这是不可能的, 因为 $M(p)$ 的次数不高于 $n-1$. 这样, 由矩阵 (12) 的行列式等于零的假设就导出矛盾, 这就意味着方程组 (11) 关于未知数

$$c^1, \cdots, c^n$$

是可解的 (并且是唯一的). 于是, 定理 5 完全得到证明.

我们指出定理 5 的一个明显的推论.

(C) 方程 (2) 的每个解 $z(t)$ 可以写成形式:

$$z(t) = f_1(t)e^{\lambda_1 t} + f_2(t)e^{\lambda_2 t} + \cdots + f_m(t)e^{\lambda_m t},$$

其中 $f_j(t)$ 是幂次数不超过 $k_j - 1$ 的多项式, $j = 1, \cdots, m$. 这时多项式 $f_1(t), \cdots, f_m(t)$ 是由解 $z(t)$ 所唯一确定的, 这是因为它们的系数就是积分常数 $c^1, c^2, \cdots, c^n$, 而根据定理 5, 这些常数是由解 $z(t)$ 所唯一确定的.

如果方程 (2) 的系数是实的, 那么在我们面前就提出了如何从方程 (2) 的全体复值解中分出实解的问题.

(D) 假设方程 (2) 的特征多项式 $L(p)$ 的系数是实的. 设 λ 是多项式 $L(p)$ 的某个 k 重根; 那么当 $r = 0, 1, \cdots, k-1$ 时, 函数 $t^r e^{\lambda t}$ 是方程 (2) 的解. 如果 λ 是实数, 那

么函数 $t^r e^{\lambda t}$ 也是实的, 如果根是复的, 那么除了有解 $t^r e^{\lambda t}$ 之外, 还有与它复共轭的解 $t^r e^{\overline{\lambda} t}$, 因为 $\overline{\lambda}$ 也是多项式 $L(p)$ 的 k 重根. 因此, 在解组 (3) 中除了每个复值解之外, 还有与它复共轭的解. 为了使得解 (4) 是实的, 必要且充分的条件是: 实解的系数是实的, 成对复共轭解的系数是成对复共轭的.

命题 (D) 的证明与在 §7 中根据命题 (D) 来证明 §7 中命题 (E) 完全一样地进行.

例题

1. 我们求解方程

$$z^{(5)} + 3z^{(4)} + 3z^{(3)} + \ddot{z} = 0\,.$$

这个方程可以写成 (2) 的形式, 这时特征多项式 $L(p)$ 有形式:

$$p^5 + 3p^4 + 3p^3 + p^2 = p^2(p+1)^3\,.$$

这个多项式的根是数

$$\lambda_1 = 0\,, \lambda_2 = -1\,,$$

它们的重数分别为 $k_1 = 2, k_2 = 3$. 于是根据定理 5, 所论方程的解组 (3) 为:

$$z_1 = 1\,,\quad z_2 = t\,,\quad z_3 = e^{-t}\,,\quad z_4 = te^{-t}\,,\quad z_5 = t^2e^{-t}\,.$$

其通解由下式给出:

$$z = (c^1 + c^2 t) + (c^3 + c^4 t + c^5 t^2)e^{-t}\,.$$

2. 我们求解方程

$$z^{(4)} + 2\ddot{z} + z = 0\,.$$

其特征多项式为 $L(p) = (p^2+1)^2$; 它的 (二重) 根为数 $\lambda_1 = i, \lambda_2 = -i$. 所论方程的通解可写成形式:

$$z = (c^1 + c^2 t)e^{it} + (c^3 + c^4 t)e^{-it}\,.$$

下面两个例题给出如何分出实解的一般规则, 它们直接由命题 (D) 推出. 例题 3 和例题 4 完全类似于 §7 中的例题 2 和例题 3.

3. 在 §7 的例题 2 中没有考虑到解的具体形式, 而只假设解组 $z_1, \cdots, z_n$ 是由成对共轭解和实解所组成. 因此, 同样的讨论说明在重根的情况下, 我们有下面的一般规则. 应当在解组 (3) 中把每一对复共轭解换成这对解中之一的实部和虚部. 用这个方法得到的函数组具有这样的性质: 任意一个实解都是它们的实系数线性组合.

4. 设

$$t^r e^{\lambda t}\,,\quad t^r e^{\overline{\lambda} t}$$

是解组 (3) 中的两个复共轭解, 当解 z 为实的情形时, 在和式 (4) 中与这两个解相对应的部分可以写成形式:

$$\hat{z} = c\,t^r e^{(\mu + i\nu)t} + \overline{c}\,t^r e^{(\mu - i\nu)t}\,.$$

令

$$c=\frac{1}{2}\rho e^{i\alpha},$$

那么我们就有

$$\hat{z}=\rho t^{r}e^{\mu t}\cos(\nu t+\alpha). \tag{14}$$

用这个方法可以把出现在和式(4) 中的每一对复共轭解换成含有两个任意常数 ρ 和 α 的形式(14)的实函数. 这里也像在§7的例题3中那样, 再一次看出, 根λ虚部$\nu\neq 0$的出现使得解具有振动特性, 而根λ实部$\mu\neq 0$的存在, 将导致或者解的增大 (当$\mu>0$), 或者解的减小 (当$\mu<0$). 最后, 根λ的多重性将导致因子t^r 的出现, 它也影响到解的增大, 但是当$t\to+\infty$及$\mu<0$时, 由因子t^r引起解的增大比起由因子$e^{\mu t}$导致解的减小的影响要小得多, 因此当$\mu<0$时 (对根的任何重数), 解都随着t的无限增大而趋向于零.

5. 利用例题3和4的结论, 我们可以把在例题2中所讨论方程的全部实解写成如下两种公式:

$$z=(a^1+a^2t)\cos t+(b^1+b^2t)\sin t,$$
$$z=\rho_1\cos(t+\alpha_1)+\rho_2\cos(t+\alpha_2).$$

§9. 稳定多项式

设

$$L(p)z=0 \tag{1}$$

是常系数线性齐次方程. 关于这个方程的解当$t\to+\infty$时的趋向问题 (它们是趋于零, 还是保持有界或者无限增长), 在整个常微分方程理论的应用系列中起了非常重要的作用. 在§7的例题3和§8的例题4中已经指出, 关于方程(1)解的性态这类问题与多项式$L(p)$的根的实部有关. 现在我们更确切地说明这种联系.

(A) 如果多项式$L(p)$所有的根都具有负实部, 或者用几何上的话来说, 就是所有的根都位于复平面上虚轴的左边, 就称它是**稳定的**. 设

$$\lambda_j=\mu_j+i\nu_j,\quad j=1,\cdots,m$$

是多项式$L(p)$所有的根. 如果这个多项式是稳定的, 那么存在正数α, 使得

$$\mu_j<-\alpha,\quad j=1,\cdots,m. \tag{2}$$

在这种情况下, 我们证明存在正数M, 使得对于方程(1)的每个解$\varphi(t)$有

$$|\varphi(t)|<Me^{-\alpha t},\quad 当\, t\geqslant 0. \tag{3}$$

这个公式不仅指出方程(1)的每一个解当$t\to+\infty$时趋向于零, 而且还估计了这个解趋向于零的时候进行得有多快.

首先我们对方程 (1) 包含在 §8 函数组 (3) 中的任意解 z_s, $s=1,\cdots,n$ 来证明公式 (3). 我们有

$$z_s = t^r e^{\lambda_j t}, \text{从而} \quad \left|\frac{z_s}{e^{-\alpha t}}\right| = t^r e^{(\mu_j+\alpha)t}.$$

根据 (2), 数 $\mu_j+\alpha$ 是负的, 所以函数 $t^r e^{(\mu_j+\alpha)t}$ 当 $t\to+\infty$ 时趋于零, 因此当 $t\geqslant 0$ 时它是有界的. 于是我们有

$$\left|\frac{z_s}{e^{-\alpha t}}\right| < M_s, \quad \text{当} t\geqslant 0,$$

或者同样地

$$|z_j| < M_j e^{-\alpha t}, \quad \text{当} t\geqslant 0.$$

现在如果

$$\varphi(t) = c^1 z_1 + c^2 z_2 + \cdots + c^n z_n$$

是方程 (1) 的任意解, 那么当 $t>0$ 时有

$$|\varphi(t)| \leqslant (|c^1|M_1 + |c^2|M_2 + \cdots + |c^n|M_n)e^{-\alpha t} = Me^{-\alpha t}.$$

因此不等式 (3) 得到证明. 值得注意, 如果多项式 $L(p)$ 至少有一个根 λ_j 有正实部 $\mu_j>0$, 那么当 $t\to+\infty$ 时, 方程 (1) 有解 $e^{\lambda_j t}$ 无限地增大.

找出各种对实际应用尽可能方便的多项式稳定性条件, 直到现在, 还花费着数学家们的许多研究. 对于二次多项式的稳定性条件可直接从二次方程解的公式得出 (见 (B)). 至于任意 n 次多项式的稳定性问题已由数学家劳斯 (Routh) 和赫尔维茨 (Hurwitz) 以略为不同的方式解决了. 但是劳斯–赫尔维茨条件对于实际计算还是不大方便, 因此, 直到现在还在探求稳定性条件新的表示. 这里将引进 $n=3$ 时劳斯–赫尔维茨判别法的证明, 并不加证明地给出赫尔维茨形式下对于任意次数 n 的稳定性条件.

(B) 具有实系数 a 和 b 的二次多项式 $L(p)=p^2+ap+b$ 当且仅当它的系数是正的时候才是稳定的.

这个结论容易用二次方程解的公式来验证.

(C) 如果实系数多项式 $L(p)=p^n+a_1p^{n-1}+\cdots+a_n$ 是稳定的, 那么它的所有系数都是正的.

为了证明, 我们把多项式 $L(p)$ 分解为实的一次和二次的因子, 也就是分解成形式为 $p+c$ 及 p^2+ap+b 的因子. 由于多项式 $L(p)$ 是稳定的, 因此所分解成以上形式的每个因子也是稳定的. 为了因子 $p+c$ 的稳定性, 数 c 必须是正的; 为了因子 p^2+ap+b 稳定, 也必须两个数 a 和 b 都是正的. 从这些因子系数的正号性容易推出乘积系数的正号性.

下面的定理给出三次多项式稳定性的判别法.

定理 6 *具有实系数的多项式*

$$L(p) = a_0p^3 + a_1p^2 + a_2p + a_3\,, \quad a_0 > 0$$

是稳定的, 当且仅当数 a_1, a_2, a_3 *是正的, 而且满足不等式*

$$a_1a_2 > a_0a_3\,.$$

证明 在证明时我们将考虑首项系数等于1的多项式

$$L(p) = p^3 + ap^2 + bp + c\,; \tag{4}$$

一般多项式 $L(p)$ 的情形容易化成这个多项式. 由于命题(C), 我们只需证明有正系数 a, b, c 的多项式(4)是稳定的, 当且仅当有不等式

$$ab > c \tag{5}$$

成立就行了. 在证明中我们用到多项式的根是其系数的连续函数.

首先我们说明在怎样的条件下, 多项式(4)有纯虚根, 特别有 $p = 0$ 的根, 因为它落在虚轴上, 也应当看成纯虚根. 我们有

$$L(p) = (p + a)(p^2 + b) - ab + c\,. \tag{6}$$

如果多项式 $L(p)$ 有零根, 那么 $c = 0$, 而根据假设这种情况已经排除了, 因为 $c > 0$. 我们假设, 数 $i\omega$, $\omega \neq 0$, 是多项式 $L(p)$ 的根. 如果 $-\omega^2 + b$ 不为零, 那么数 $(i\omega + a)(-\omega^2 + b)$ 有不等于零的虚部, 因而不能和实数 $-ab + c$ 相消. 因此, 数 $i\omega$ 仅在 $-\omega^2 + b = 0$ 时才能是多项式 $L(p)$ 的根; 在这种情况下, 我们有等式

$$L(i\omega) = -ab + c = 0\,.$$

反之, 如果 $ab = c$, 那么由于(6), 多项式 $L(p)$ 有纯虚根 $p = \pm i\sqrt{b}$, 因此, (正系数的) 多项式 $L(p)$ 有纯虚根当且仅当 $ab = c$. 特别, 在当连续变动正系数 a, b, c 时, 多项式 $L(p)$ 的根只在满足等式 $ab = c$ 时才能和虚轴相交.

假设不等式(5)不满足, 那么或者 $ab = c$, 或者 $ab < c$. 在第一种情形, 多项式 $L(p)$ 有纯虚根, 因此不稳定. 我们来证明, 在第二种情形, 也就是满足不等式

$$ab < c \tag{7}$$

时, 多项式 $L(p)$ 也是不稳定的. 我们来连续变动系数 a 和 b, 但保持它们都是正数, 使得 a, b 趋于零, 而且不破坏不等式(7). 在这样变动的过程中没有一个根从虚轴的一边穿过虚轴到另一边去, 因此多项式的稳定性并不改变. 当 $a = b = 0$ 时, 得到多项

式 p^3+c, 它有根 $c^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{\pi}{3}\pm i\sin\frac{\pi}{3}\right)$, 这些根都位于虚轴的右边. 由于根对系数的连续依赖性, 当正数 a 和 b 充分小时, 多项式保持不稳定性 (有根在虚轴的右边).

现在假设满足不等式 (5), 而来证明多项式 $L(p)$ 是稳定的. 为此, 变动常数 c, 使得它趋向于零但仍然为正的, 而且不破坏不等式 (5). 当 $c=0$ 时, 我们得到多项式

$$L(p)=p(p^2+ap+b),$$

它有一个零根和两个负实部的根. 对于小的正数 c, 这两个根的变动也不大, 因此它们的乘积仍然是正的, 而零根则变成小的正根或者小的负根. 因为全部三个根的乘积等于负数 $(-c)$, 所以接近于零的根必定是负的. 于是定理 6 得证.

为了叙述任意实系数多项式稳定性的必要和充分条件, 先给出如下术语. 设

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}$$

是任意的 n 阶方阵. 矩阵

$$\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1k} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{k1} & p_{k2} & \cdots & p_{kk} \end{bmatrix}$$

的行列式称为它的 **k阶主子式**; 并记这个 k 阶主子式为 $\Delta_k(\boldsymbol{P})$. 因此, 行列式 $\Delta_k(\boldsymbol{P})$ 由矩阵 $\boldsymbol{P}$ 中的前 k 行和前 k 列的元素组成.

定理 7 假设

$$a_0p^n+a_1p^{n-1}+\cdots+a_n,\quad a_0>0 \tag{8}$$

是任意的 n 次实系数多项式, 为了判明它的稳定性问题, 我们构造 n 阶方阵

$$\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \cdots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \cdots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & a_{n-2} & a_n \end{bmatrix}.$$

可证明, 多项式 (8) 是稳定的当且仅当矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 的所有的主子式 $\Delta_k(\boldsymbol{Q})$, $k=1,\cdots,n$, 都是正数.

在本书中将不证明定理 7，它的证明可以在其他书中找到. 例如切塔也夫的书《运动稳定性》(Н. Г. Четаев, Устойчивость движения, Гостехиздат, М., 1955, 79~83).

为了避免写出矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 时产生错误, 注意到矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 的第 k 列元素有形式:

$$\cdots\ a_{k+2}\ a_{k+1}\ a_k\ a_{k-1}\ a_{k-2}\ \cdots,$$

其中元素 a_k 位于主对角线上; 这时当下标 $k+j$ 为负数或大于 n 时, 认为元素 a_{k+j} 等于零.

例题

1. 我们从定理 7 来推出定理 6. 在 $n=3$ 的情形中, 矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 有形式:

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{bmatrix}.$$

它的三个主子式有如下数值:

$$\Delta_1(\boldsymbol{Q}) = a_1, \quad \Delta_2(\boldsymbol{Q}) = a_1a_2 - a_0a_3, \quad \Delta_3(\boldsymbol{Q}) = a_3\Delta_2(\boldsymbol{Q}).$$

它们的正号性条件和系数 a_0 的正号性条件一起等价于条件:

$$a_0 > 0,\ a_1 > 0,\ a_3 > 0,\ a_1a_2 > a_0a_3.$$

从这些条件的全体, 容易看出系数 a_2 的正号性. 因此, 在 $n=3$ 的情况下, 定理 7 成为定理 6.

2. 在 $n=4$ 的情形中, 矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 有形式:

$$\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 \end{bmatrix}.$$

它的主子式有如下数值:

$$\Delta_1(\boldsymbol{Q}) = a_1,\ \Delta_2(\boldsymbol{Q}) = a_1a_2 - a_0a_3,\ \Delta_3(\boldsymbol{Q}) = a_3\Delta_2(\boldsymbol{Q}) - a_1^2a_4,\ \Delta_4(\boldsymbol{Q}) = a_4\Delta_3(\boldsymbol{Q}).$$

容易看出, 这些主子式的正号性条件和条件 $a_0>0$ 一起等价于条件:

$$a_0 > 0,\ a_1 > 0,\ a_2 > 0,\ a_3 > 0,\ a_4 > 0,\ \Delta_3(\boldsymbol{Q}) = a_1a_2a_3 - a_0a_3^2 - a_1^2a_4 > 0.$$

§10. 常系数线性非齐次方程

这一节将给出含有自由项的常系数线性方程的解法, 这里的自由项是一些所谓**拟多项式**的特殊形式函数.

(A) 每一个可以写成形式:

$$F(t) = f_1(t)e^{\lambda_1 t} + f_2(t)e^{\lambda_2 t} + \cdots + f_m(t)e^{\lambda_m t} \tag{1}$$

的函数 $F(t)$ 都称为**拟多项式**, 其中 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ 是一些复数, 而 $f_1(t), f_2(t), \cdots, f_m(t)$ 是 t 的多项式. 从 §8 中的命题 (C) 知道, 常系数线性齐次方程的每一个解都是拟多项式. 相反地, 可以证明, 每个拟多项式都是某一个常系数线性齐次方程的解. 如果序列 $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$ 中有某两个数相同, 例如, 如果 $\lambda_1 = \lambda_2$, 那么和式 (1) 中与这两个数相对应的项可以合并成一项 $(f_1(t) + f_2(t))e^{\lambda_1 t}$. 因此写法 (1) 总可以化为这样的形式, 使得在它里面出现的数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ 是两两不相同. 我们还注意到, 任意两个拟多项式的和与积也是拟多项式; 此外如果把任意算子 $L(p)$ 应用到任意的拟多项式上, 我们仍然得到拟多项式.

因此, 在这一节将考察方程

$$L(p)z = F(t), \tag{2}$$

其中 $F(t)$ 是某一个拟多项式. 除了方程 (2) 之外, 我们还考虑相应的齐次方程

$$L(p)u = 0. \tag{3}$$

下面的命题直接从 §6 中的结论 (B) 推出.

(B) 如果 $\hat{z}$ 是方程 (2) 的某一个解, 那么同一个方程的任一个解 z 可以写成形式:

$$z = \hat{z} + u,$$

其中 u 是方程 (3) 的某一个解.

由于我们已经学会找出齐次方程的任意解, 因此这样一来事情就变成为在 $F(t)$ 是拟多项式的情况下, 求出方程 (2) 的一个解, 或者像通常所说的, 求出一个**特解**. 其次, 由于每一个拟多项式都可以写成形式 (1), 所以根据 §6 中结论 (C), 事情就变成为求出方程 (2) 在 $F(t) = f(t)e^{\lambda t}$ 情形下的特解, 这里 $f(t)$ 是 t 的多项式. 对于这种情形, 按照下面定理来求解.

为了避免误会起见, 我们注意到今后谈到 r 次多项式时都将理解为形式 $a_0t^r + a_1t^{r-1} + \cdots + a_{r-1}t + a_r$ 的函数, 而且不一定假设首项系数 a_0 不为零.

定理 8 *考虑非齐次方程*

$$L(p)z = f(t)e^{\lambda t}, \tag{4}$$

其中 $f(t)$ 是 t 的 r 次多项式, 而 λ 是复数. 如果 $L(\lambda) \neq 0$ 我们就取 $k=0$; 如果 $L(\lambda) = 0$ 就取 k 为根 λ 的重数. 那么方程 (4) 存在形式为

$$z = t^k g(t) e^{\lambda t} \tag{5}$$

的特解, 其中 $g(t)$ 是 t 的 r 次多项式. 多项式 $g(t)$ 的系数可以用待定系数法求出.

证明 令

$$f(t) = a_0 t^r + f^*(t), \tag{6}$$

并求形式为

$$g(t) = b_0 t^r + g^*(t) \tag{7}$$

的多项式 $g(t)$, 其中多项式 $f^*(t)$ 和 $g^*(t)$ 的次数为 $r-1$. 其次, 由于数 k 的选法, 我们有

$$L(p) = M(p)(p-\lambda)^k, \tag{8}$$

其中 $M(\lambda) \neq 0$. 为了使得函数 (5) 是方程 (4) 的解, 它必须满足条件 (见 §8,(A))

$$L(p)e^{\lambda t} t^k g(t) = e^{\lambda t} L(p+\lambda) t^k g(t) = e^{\lambda t} f(t),$$

亦即多项式 $g(t)$ 应当满足的条件为

$$L(p+\lambda) t^k g(t) = f(t). \tag{9}$$

又因为多项式 $M(p+\lambda)$ 有常数项 $M(\lambda) \neq 0$, 因此它可以写成形式:

$$M(p+\lambda) = M(\lambda) + M^*(p)p, \quad M(\lambda) \neq 0. \tag{10}$$

注意到关系 (6),(7),(8) 和 (10), 我们现在可以把加在多项式 $g(t)$ 上的条件 (9) 写成形式:

$$b_0 M(\lambda) p^k t^{k+r} + b_0 M^*(p) p^{k+1} t^{k+r} + L(p+\lambda) t^k g^*(t) = a_0 t^r + f^*(t). \tag{11}$$

比较等式 (11) 中含有 t^r 的项, 我们得到关系式

$$b_0 M(\lambda) p^k t^{k+r} = a_0 t^r, \tag{12}$$

由此确定待求多项式 $g(t)$ 的系数 b_0 (因为 $M(\lambda) \neq 0$), 并且 b_0 是唯一确定的. 现在假设系数 b_0 已经求出, 因此关系式 (12) 成立; 于是关系式 (11) 取形式:

$$L(p+\lambda) t^k g^*(t) = f^*(t) - b_0 M^*(p) p^{k+1} t^{k+r}, \tag{13}$$

其中等式的右边是已知的 $r-1$ 次多项式, 而左边是未知的 $r-1$ 次多项式 $g^*(t)$. 方程 (13) 与方程 (9) 所不同的只是在 (13) 中出现的多项式降低了一次. 对于方程 (13),

重复上面对方程 (9) 所进行的计算, 我们算出多项式 $g^*(t)$ 中 t 最高幂次 (即 $r-1$ 次) 项的系数 b_1. 继续这个过程, 我们就用这样的方法算出多项式 $g(t)$ 的所有系数 $b_0, b_1, \cdots, b_r$, 使得 $g(t)$ 满足条件 (9), 同时也就求出方程 (4) 形式如 (5) 的解.

可以直接把形式 (5) 的解代入方程 (4), 并假定多项式 $g(t)$ 的系数是未知的, 通过比较关系式 (4) 左右两边 t 的同次幂项系数, 就得到对于这些系数的线性代数方程组. 上面进行的计算说明, 关于多项式 $g(t)$ 系数的方程组是可解的.

于是, 定理 8 得证.

注 所得到的确定多项式 $g(t)$ 系数的方程组是有三角系数矩阵的线性方程组: 比较项 $t^r e^{\lambda t}$ 的系数, 我们得到只含 b_0 的方程; 比较项 $t^{r-1}e^{\lambda t}$ 的系数, 我们得到只含 b_0 和 b_1 的方程等等.

我们来建立拟多项式的一个重要性质.

(C) 如果拟多项式

$$F(t) = f(t)e^{\lambda_1 t} + f_2(t)e^{\lambda_2 t} + \cdots + f_m(t)e^{\lambda_m t}$$

在某区间 $r_1 < t < r_2$ 上恒等于零, 其中 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ 是两两不同的数, 那么所有多项式 $f_1(t), f_2(t), \cdots, f_m(t)$ 都恒等于零, 从而拟多项式的所有系数等于零. 由此立即推出, 如果两个拟多项式 $F(t)$ 和 $F^*(t)$ 在某区间上恒等, 那么它们对应的系数是相同的.

命题 (C) 将对数 m 用归纳法证明, 这里数 m 称为拟多项式 $F(t)$ 的**阶数**. 当 $m = 1$ 时, 它是正确的, 因为在这种情况下, 等式 $F(t) = f_1(t)e^{\lambda_1 t} = 0$ 和 $f_1(t) = 0$ 是等价的. 现在从 $m-1$ 到 $m (m \geqslant 2)$ 进行归纳证明. 如果拟多项式 $F(t)$ 在区间 $r_1 < t < r_2$ 上恒等于零, 那么这对于拟多项式

$$G(t) = p^{l+1}(F(t)e^{-\lambda_m t})$$

也成立, 其中 p 是微分算子, 而 l 是多项式 $f_m(t)$ 的次数. 由 §8 中命题 (A), 我们有

$$G(t) = g_1(t)e^{(\lambda_1 - \lambda_m)t} + g_2(t)e^{(\lambda_2 - \lambda_m)t} + \cdots + g_{m-1}(t)e^{(\lambda_{m-1} - \lambda_m)t},$$

其中

$$g_i(t) = (p + \lambda_i - \lambda_m)^{l+1} f_i(t), \quad i = 1, \cdots, m-1.$$

由于拟多项式 $G(t)$ 有 $m-1$ 阶, 而且它在区间 $r_1 < t < r_2$ 上恒等于零, 因此根据归纳法假设, 所有多项式 $g_1(t), \cdots, g_{m-1}(t)$ 都恒等于零. 我们假设, 多项式 $f_1(t), \cdots, f_{m-1}(t)$ 中的某一个不等于零, 例如 $f_1(t) \neq 0$, 我们要从这个假设导出矛盾来. 设多项式 $f(t)$ 的次数为 k, 即 $f_1(t) = a_0 t^k + a_1 t^{k-1} + \cdots + a_k$, 而 $a_0 \neq 0$. 直接验证即知

$$g_1(t) = (p + \lambda_1 - \lambda_m)^{l+1} f_1(t) = (\lambda_1 - \lambda_m)^{l+1} a_0 t^k + \cdots,$$

又由于多项式 $g_1(t)$ 在区间 $r_1 < t < r_2$ 上恒等于零, 所以我们有

$$(\lambda_1 - \lambda_m)^{l+1} a_0 = 0 .$$

因为数 λ_1 和 λ_m 不相同, 于是由此得出 $a_0 = 0$. 得到的矛盾证明了多项式 $f_1(t), \cdots, f_{m-1}(t)$ 的所有系数都等于零, 亦即 $F(t) = f_m(t)e^{\lambda_m t}$. 由此我们断定多项式 $f_m(t)$ 的所有系数也等于零.

对于两个拟多项式 $F(t)$ 和 $F^*(t)$ 在区间 $r_1 < t < r_2$ 上恒等的情形, 通过作出拟多项式 $F(t) - F^*(t)$ 就化为所考虑过的情形.

于是, 命题 (C) 得证.

例题

1. 求出方程

$$\ddot{z} + z = t\cos t = \frac{1}{2}te^{it} + \frac{1}{2}te^{-it} \tag{14}$$

的特解. 我们分别来求解方程

$$\ddot{z} + z = \frac{1}{2}te^{it}, \tag{15}$$

$$\ddot{z} + z = \frac{1}{2}te^{-it}. \tag{16}$$

显然, 如果 z 是方程 (15) 的解, 那么 $\overline{z}$ 就是方程 (16) 的解. 因此, 只解方程 (15) 就够了. 对于它有 $r = 1, \lambda = i, k = 1$. 所以应当求形式为

$$t(c^1 + c^2 t)e^{it}$$

的特解. 关系式 (9) 取形式:

$$[(p+i)^2 + 1](c^1 t + c^2 t^2) = \frac{1}{2}t,$$

或者写成

$$(p^2 + 2ip)(c^1 t + c^2 t^2) = \frac{1}{2}t.$$

这就给出

$$2c^2 + 2ic^1 + 4ic^2 t = \frac{1}{2}t,$$

由此得到 $c^2 = -\frac{1}{8}i$, $c^1 = ic^2 = \frac{1}{8}$. 因此, 方程 (15) 的特解有形式:

$$z = \left(\frac{1}{8}t - \frac{i}{8}t^2\right)e^{it},$$

而方程 (14) 的解就等于

$$z + \overline{z} = \frac{1}{8}t(e^{it} + e^{-it}) + \frac{1}{8i}t^2(e^{it} - e^{-it}) = \frac{t}{4}\cos t + \frac{t^2}{4}\sin t.$$

2. 考虑函数

$$f(t)=\cos(2t)\,\cos(3t)\cdot e^{4t}.$$

由于因子 $\cos(2t), \cos(3t), e^{4t}$ 中的每一个都是拟多项式, 所以它们的乘积 $f(t)$ 也是拟多项式. 我们把这个拟多项式化为形式 (1):

$$\begin{aligned}\cos(2t)\,\cos(3t)\cdot e^{4t}&=\frac{e^{2it}+e^{-2it}}{2}\cdot\frac{e^{3it}+e^{-3it}}{2}\cdot e^{4t}\\&=\frac{1}{4}e^{(4+5i)t}+\frac{1}{4}e^{(4+i)t}+\frac{1}{4}e^{(4-i)t}+\frac{1}{4}e^{(4-5i)t}.\end{aligned}$$

把拟多项式化成 (1) 的形式, 而后根据定理 8 来求解非齐次方程是很方便的.

§11. 消去法

直到现在, 我们都是在求解一个常系数线性方程. 但是可以证明, 很一般的常系数线性方程组在某种意义上可以化成一个方程式. 这种转化是由**消去法**来实现的. 它类似于在线性代数 (不是微分) 方程理论中用到的消去法. 在这里我们将叙述这种方法并由此得出一些结论.

我们考虑方程组

$$\sum_{s=1}^{n}L_s^j(p)x^s=f^j(t),\quad j=1,\cdots,n;\tag{1}$$

其中 $x^1,\cdots.x^n$ 是自变量 t 的未知函数, 而 $f^1(t),\cdots,f^n(t)$ 是时间 t 给定的函数. 每个符号 $L_s^j(p)$ 都是关于微分算子 p 的常系数多项式, 因此每一项 $L_s^j(p)x^s$ 都是函数 x^s 以及其导数的常系数线性组合. 方程组 (1) 中方程的个数就等于未知函数的个数.

方程组 (1) 关于未知函数 x^s 的阶数记为 q_s, 因此方程组 (1) 的总阶数由公式 $q=q_1+q_2+\cdots+q_n$ 确定. 既然提出求解方程组 (1) 的问题, 我们自然**应当假定**每个函数 x^s 都有直到包括 q_s 阶在内的所有导数; 但从问题的提法并不能推出关于更高阶导数也存在的结论.

对方程组 (1) 应用消去法时, 我们**将假设**每个未知函数 x^s 都有足够次数的导数, 同样对每个函数 $f^j(t)$ 也是如此. 作了这样的假设之后, 一方面我们缩小了所讨论解的类别 (关于未知函数足够可微性假设), 而从另一方面, 缩小了所考察方程的类别 (关于函数 $f^j(t)$ 的足够可微性假设). 第一个限制在证明了下列的事实之后, 就可以取消: 如果 $x^1,\cdots,x^n$ 是方程组 (1) 的解, 并且右边的 $f^j(t)$ 有足够次数的导数, 那么每一个函数 x^s 就有足够次数的导数 (见例题 3 和例题 4).

我们转回来到消去法的叙述.

(A) 我们考虑方程组 (1) 的矩阵

$$\begin{bmatrix} L_1^1(p) & \cdots & L_n^1(p) \\ \vdots & & \vdots \\ L_1^n(p) & \cdots & L_n^n(p) \end{bmatrix}. \tag{2}$$

矩阵 (2) 的每个元素 $L_s^j(p)$ 都是关于 p 的多项式. 因此可以计算矩阵 (2) 的行列式 $D(p)$ 和它的余子式. 矩阵 (2) 中元素 $L_s^j(p)$ 的代数余子式 (就是这个元素取适当符号的余子式) 记为 $M_j^s(p)$, 从高等代数教程中知道有恒等式

$$\sum_{j=1}^{n} M_j^i(p) L_s^j(p) = \delta_s^i D(p) \tag{3}$$

成立, 其中 δ_s^i 是所谓克罗内克 (Kronecker) 符号:

$$\delta_i^i = 1, \delta_s^i = 0 \quad 当\ i \neq s.$$

用多项式 $M_j^i(p)$ 乘以方程 (1) (就是进行一系列求导、与数相乘以及加法的运算), 然后关于 j 取和, 我们得到等式

$$\sum_{j,s=1}^{n} M_j^i(p) L_s^j(p) x^s = \sum_j M_j^i(p) f^j(t) \tag{4}$$

(当把方程 (1) 化成方程 (4) 时, 我们利用了函数 x^s 和 $f^j(t)$ 的足够高阶导数存在性). 由于 (3), 可以把等式 (4) 重写成形式:

$$D(p) x^i = \sum_j M_j^i(p) f^j(t). \tag{5}$$

我们得到的方程组 (5) $(i = 1, \cdots, n)$ 具有这样的性质, 每一个未知函数 x^i 只含在 (5) 的一个方程之内. 因此, 我们证明了: 如果函数组 $x^1, \cdots, x^n$ 是方程组 (1) 的解, 那么每一个个别的函数 x^i 都是方程 (5) 的解.

但是不应当以为: 如果对每一个数 i, 以任意方式选取方程 (5) 的解 x^i, 而后组成函数组 $x^1, \cdots, x^n$, 那么所得到的函数组就是方程组 (1) 的解. 为了求出方程组 (1) 的通解, 需要对每一个 $i = 1, \cdots, n$, 找出方程 (5) 的通解 x^i, 组成函数组 $x^1, \cdots, x^n$, 然后弄清楚在什么条件下 (在积分常数之间的什么关系下), 这个函数组满足方程组 (1).

我们现在从消去法推出一些结论. 首先对齐次方程组

$$\sum_{s=1}^{n} L_s^j(p) x^s = 0, \quad j = 1, \cdots, n \tag{6}$$

的情形来叙述从命题 (A) 中所得到的结论.

(B) 如果函数组$x^1,\cdots,x^n$是方程组(6)的解，那么出现在这个解中的每一个个别的函数x^i都满足方程

$$D(p)x^i = 0,$$

其中$D(p)$是方程组(6)的矩阵$(L_s^j(p))$的行列式. 由此特别推出，如果行列式$D(p)$是稳定多项式(见§9,(A))，那么方程组(6)的每组解$x^1,\cdots,x^n$满足不等式

$$(x^1)^2+\cdots+(x^n)^2 < R^2e^{-2\alpha t}, \quad 当\ t \geqslant 0, \tag{7}$$

其中α是与方程组(6)有关的正常数，而R是与解$x^1,\cdots,x^n$有关的常数.

不等式(7)直接从§9中的不等式(3)得出.

我们现在指出，利用消去法能够很好地求解齐次方程组(6).

将方程组(6)重新写成向量形式

$$L(p)\boldsymbol{x} = 0, \tag{8}$$

这里$L(p) = (L_s^j(p))$为方程组(6)的矩阵，而$\boldsymbol{x} = (x^1,\cdots,x^n)$.

(C) 假设方程组(6)的行列式$D(p)$不恒等于零，且设λ是多项式$D(p)$的k重根. 我们来求方程组(8)形式为

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{g}(t)e^{\lambda t} \tag{9}$$

的解，其中$\boldsymbol{g}(t) = (g^1(t),\cdots,g^n(t))$是分量为

$$g^1(t),\cdots,g^n(t) \tag{10}$$

的向量，它们都是关于t的$k-1$次待定系数多项式. 我们将把方程(8)的每一个形式(9)的解称为**对应于根**λ**的解**.

把所设想的解(9)代入方程组(8)，我们得到(见§8,(A))：

$$\mathbf{0} = L(p)\boldsymbol{g}(t)e^{\lambda t} = e^{\lambda t}L(p+\lambda)\boldsymbol{g}(t).$$

在约去因子$e^{\lambda t}$之后，这就给出:

$$L(p+\lambda)\boldsymbol{g}(t) = \mathbf{0}. \tag{11}$$

因此向量(9)是方程(8)的解当且仅当多项式(10)满足条件(11). 将向量方程(11)重写成坐标形式，我们得到n个关系式:

$$\sum_{s=1}^{n} L_s^j(p+\lambda)g^s(t) = 0, \quad j = 1,\cdots,n. \tag{12}$$

在(12)中每一个关系式的左端都是关于t的$k-1$次多项式，其系数是多项式(10)的系数的线性齐次函数. 在(12)的每一个关系式中令t的每一个幂次的系数等于零，我们就得到关于多项式(10)系数的线性齐次方程组. 这个方程组等价于方程(11).

于是, 上述方法把寻找形式 (9) 的解的问题转变成求出某个线性齐次代数方程组的解. 从上面的叙述还看出, 形式 (9) 的解在整个无限区间 $-\infty < t < +\infty$ 上都有定义.

关于如何找出方程 (8) 所有解的问题可用下面的定理来解决.

定理 9 *假设方程组 (6) 的行列式 $D(p)$ 不恒等于零, 且设*

$$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$$

是多项式 $D(p)$ 所有不同根的全体. 那么方程 (8) 的任意解 $\boldsymbol{x}$ 可以写成形式:

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 + \cdots + \boldsymbol{x}_m, \tag{13}$$

其中 $\boldsymbol{x}_i$ 是方程 (8) 对应于根 λ_i 的某个解 (见 (C)). 特别由此得出, 方程 (8) 的每个解对一切 t 值都有定义.

证明 我们假设 $\boldsymbol{x} = (x^1, \cdots, x^n)$ 是方程 (8) 定义在区间 $r_1 < t < r_2$ 上的某个解; 我们来证明在这区间上它可以写成形式 (13). 根据命题 (B), 每个函数 $x^s, s = 1, \cdots, n$, 在区间 $r_1 < t < r_2$ 上满足方程

$$D(p)x^s = 0,$$

且由于 § 8 中命题 (C), 在这个区间上它可以写成形式:

$$x^s = \sum_{i=1}^{m} g_i^s(t) e^{\lambda_i t}, \quad s = 1, \cdots, n, \tag{14}$$

其中 $g_i^s(t)$ 是 $k_i - 1$ 次多项式, 这里 k_i 是根 λ_i 的重数.

于是, 方程 (8) 的每个解 $\boldsymbol{x}$, 在其本身有定义的区间 $r_1 < t < r_2$ 上可写成形式

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{g}_1(t) e^{\lambda_1 t} + \cdots + \boldsymbol{g}_m(t) e^{\lambda_m t}, \tag{15}$$

其中 $\boldsymbol{g}_i(t)$ 是其分量为 $k_i - 1$ 次多项式的向量. 为了证明定理 9, 我们现在只需证明在等式 (15) 右端的每一个加项 $\boldsymbol{g}_i(t) e^{\lambda_i t}$ 都是方程 (8) 的解. 为了证明这个结论, 我们把解 (15) 代入方程 (8), 即得

$$\begin{aligned} \boldsymbol{0} &= L(p)(\boldsymbol{g}_1(t) e^{\lambda_1 t} + \cdots + \boldsymbol{g}_m(t) e^{\lambda_m t}) \\ &= e^{\lambda_1 t} L(p + \lambda_1) \boldsymbol{g}_1(t) + \cdots + e^{\lambda_m t} L(p + \lambda_m) \boldsymbol{g}_m(t). \end{aligned} \tag{16}$$

因为数 $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$ 是两两互不相同的, 所以根据 § 10 中的命题 (C), 由等式 (16) 得出

$$e^{\lambda_i t} L(p + \lambda_i) \boldsymbol{g}_i(t) = \boldsymbol{0}, \quad i = 1, \cdots, m,$$

或者写成另一个样子

$$L(p) \boldsymbol{g}_i(t) e^{\lambda_i t} = \boldsymbol{0}, \quad i = 1, \cdots, m.$$

但是这也就意味着 $\boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{g}_i(t) e^{\lambda_i t}$ 是方程组 (8) 的解. 于是定理 9 得证.

例题

1. 用消去法解方程组

$$\begin{cases}\dot{x}^1+x^1+\dot{x}^2=0\,,\\ \ddot{x}^1-x^1+\ddot{x}^2+x^2=0\,.\end{cases}$$

把它重写成符号形式:

$$\begin{cases}(p+1)x^1+px^2=0\,,\\ (p^2-1)x^1+(p^2+1)x^2=0\,.\end{cases}$$

容易看出, 方程组的行列式等于 p^2+2p+1; 它有二重根 $\lambda=-1$. 按照定理9应当求出方程组形式为

$$\begin{cases}x^1=(at+b)e^{-t}\,,\\ x^2=(ct+d)e^{-t}\end{cases}$$

的解. 把这些函数代入第一个方程 (在约去 e^{-t} 之后) 给出

$$a+c-ct-d=0\,,$$

由此得到

$$\begin{cases}c=0\,,\\ a=d\,.\end{cases}$$

当代入方程组的第二个方程时, 对于系数得到同样的关系式. 因此, 所考察方程组的通解写成形式:

$$\begin{cases}x^1=(at+b)e^{-t}\,,\\ x^2=ae^{-t}\,,\end{cases}$$

其中 a 和 b 为任意常数.

2. 我们把消去法应用于标准的常系数线性齐次方程组:

$$\dot{x}^j=\sum_{s=1}^{n}a_s^jx^s\,,\quad j=1,\cdots,n \tag{17}$$

(在 § 14 中要更全面地研究这个方程组). 利用符号的记法重写方程组 (17) 为

$$px^j=\sum_{s=1}^{n}a_s^jx^s\,,\quad j=1,\cdots,n\,,$$

或者按另一种形式写成

$$\sum_{s=1}^{n}(a_s^j-p\delta_s^j)x^s=0\,,\quad j=1,\cdots,n\,, \tag{18}$$

其中 δ_s^j 是克罗内克符号. 方程组 (18) 是一般方程组 (6) 的特殊情形, 并且

$$L_s^j(p) = a_s^j - p\delta_s^j\,,$$

这时行列式 $D(p)$ 就是方程组 (17) 系数矩阵 (a_s^j) 的特征行列式. 现在用命题 (C) 和定理 9 中所说的待定系数法来求出方程组 (18) 的解.

方程组 (17) 可以写成向量形式:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x}\,, \tag{19}$$

这里 $A = (a_s^j)$, $\boldsymbol{x} = (x^1, \cdots, x^n)$, 特别当特征多项式 $D(p)$ 的根 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 相互不同时, 从而是简单的情况时, 方程 (19) 对应于特征值 λ_i 的解有形式:

$$\boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{g}_i e^{\lambda_i t}\,, \tag{20}$$

其中向量 $\boldsymbol{g}_i$ 的分量是零次多项式, 亦即数量.

将解 (20) 代入方程 (19) 之后可得:

$$\lambda_i \boldsymbol{g}_i e^{\lambda_i t} = A\boldsymbol{g}_i e^{\lambda_i t}\,.$$

在约去 $e^{\lambda_i t}$ 之后我们得到:

$$A\boldsymbol{g}_i = \lambda_i \boldsymbol{g}_i\,;$$

这就意味着 $\boldsymbol{g}_i$ 是矩阵 A 对应于特征值 λ_i 的特征向量. 由于在特征值相互不同的情况下, 一个给定特征值的所有特征向量是相互共线的, 因此对于特征值 λ_i, 选定它的某个特征向量 $\boldsymbol{h}_i$, 从而得到 $\boldsymbol{g}_i = c^i \boldsymbol{h}_i$, 其中 c^i 为任意常数. 于是, 如果矩阵 A 的所有特征值是相互不同的, 那么方程 (19) 的任意通解可写成形式:

$$\boldsymbol{x} = c^1 \boldsymbol{h}_1 e^{\lambda_1 t} + \cdots + c^n \boldsymbol{h}_n e^{\lambda_n t}\,, \tag{21}$$

其中 $c^1, \cdots, c^n$ 为任意常数.

3.　考虑常系数线性方程组 (见 (1))

$$\sum_{s=1}^{n} L_s^j(p) x^s = f^j(t)\,, \quad j = 1, \cdots, n\,, \tag{22}$$

并令 q_i 为方程组关于未知函数 x^i 的阶数, 而

$$q = q_1 + q_2 + \cdots + q_n$$

是方程组 (22) 的阶数. 其次假设

$$\begin{bmatrix} L_1^1(p) & \cdots & L_n^1(p) \\ \vdots & & \vdots \\ L_1^n(p) & \cdots & L_n^n(p) \end{bmatrix} \tag{23}$$

是方程组 (22) 的矩阵, 而 $D(p)$ 是它的行列式. 我们来证明多项式 $D(p)$ 的次数不超过数 q. 如果这个次数等于 q, 那么方程组 (22) 将称为**可标准化的**. 在这种情况下, 可以把最高阶导数

$$(x^1)^{(q_1)}, \cdots, (x^n)^{(q_n)} \tag{24}$$

解出来, 因此它可以化为标准方程组 (见 §4, (B)).

按照假设, 多项式 $L_s^j(p)$ 的次数不超过数 q_s, 因此我们可以写成

$$L_s^j(p) = a_s^j p^{q_s} + \cdots, \tag{25}$$

其中省略号表示次数低于 q_s 的项. 计算矩阵 (23) 的行列式 $D(p)$, 并考虑到公式 (25), 不难相信有

$$D(p) = \Delta\, p^q + \cdots,$$

其中 Δ 是矩阵 (a_s^j) 的行列式. 在这个公式中略去了次数低于 q 的项. 于是就建立了多项式 $D(p)$ 的最大可能次数是 q, 而且如果这个次数等于 q, 那么 $\Delta \neq 0$. 在方程组 (22) 中分出最高阶导数 (24) 的项后, 我们得到方程组

$$\sum_{s=1}^{n} a_s^j (x^s)^{(q_s)} + \cdots = f^j(t), \quad j = 1, \cdots, n. \tag{26}$$

因此, 如果方程组 (22) 是可标准化的, 那么 $\Delta \neq 0$, 并且方程组 (26) 关于最高阶导数 (24) 是可以解出来的.

由于可标准化的方程组 (22) 能化成标准的方程组, 所以按照 §3 的例题 2 所说的, 只要方程组 (22) 的右边 $f^j(t)$ 是足够次数可微的, 可标准化方程组 (22) 的每个解就有任何预先给定次数的导数.

4. 现在我们考虑方程组 (22) 的行列式 $D(p)$ 不恒等零, 但多项式 $D(p)$ 的次数小于方程组 (22) 的阶数 q 的情形. 我们来证明, 在这种情况下, 只要右端 $f^j(t)$ 是足够次数可微的, 方程组 (22) 的每个解就有任意给定次数的导数.

根据多项式 $D(p)$ 的次数小于 q 的假设, 因此行列式 Δ 等于零. 从而在矩阵 (a_s^j) 的各列之间存在线性关系; 设 $b^1, b^2, \cdots, b^n$ 是实现这个相关性的系数. 在数 $b^1, \cdots, b^n$ 之中可以有些等于零. 我们用这样的方法来改变函数 $x^1, \cdots, x^n$ 的编号, 使得以下关系式成立:

$$\begin{gathered} b^1 \neq 0,\ b^2 \neq 0,\ \cdots,\ b^m \neq 0,\ b^{m+1} = \cdots = b^n = 0, \quad 1 \leqslant m \leqslant n, \\ q_1 \geqslant q_2,\ q_1 \geqslant q_3,\ \cdots,\ q_1 \geqslant q_m. \end{gathered} \tag{27}$$

因为根据 (27) 有 $b^1 \neq 0$, 所以我们可以假设 $b^1 = 1$.

我们现在引进新的未知函数 $y^1, \cdots, y^n$ 来代替未知函数 $x^1 \cdots, x^n$, 令

$$\begin{aligned} x^1 = y^1; x^i = y^i + b^i p^{q_1 - q_i} y^1, &\quad i = 2, \cdots, m; \\ x^i = y^i, &\quad i = m+1, \cdots, n. \end{aligned} \tag{28}$$

关系式 (28) 关于新的未知函数 $y^1,\cdots,y^n$ 是可解的, 亦即我们有

$$\begin{aligned} y^1 = x^1\,; y^i = x^i - b^i p^{q_1-q_i} x^1\,, \quad i = 2,\cdots,m\,; \\ y^i = x^i\,, \quad i = m+1,\cdots,n\,. \end{aligned} \tag{29}$$

在方程组 (22) 中用新的未知函数 $y^1,\cdots,y^n$ 代替原来的未知函数 $x^1,\cdots,x^n$, 我们得到新的方程组

$$\sum_{s=1}^{n} \overset{*}{L}{}^j_s(p)y^s = f^j(t)\,, \quad j = 1,\cdots,n\,. \tag{30}$$

直接看出, 方程组 (30) 关于 y^1 的阶数 q_1^* 小于 q_1, 而它关于其余未知函数 $y^2,\cdots,y^n$ 的阶数分别等于 $q_2,\cdots,q_n$. 因此方程组 (30) 的阶数 q^* 小于方程组 (22) 的阶数 q.

如果把变换 (28) 和 (29) 看成是将变量 $x^1,\cdots,x^n$ 变成变量 $y^1,\cdots,y^n$ 的线性变换和逆变换, 其系数是关于 p 的多项式, 那么可以看出线性变换 (28) 和 (29) 中每一个的行列式都等于 $+1$. 由此推出, 方程组 (30) 的行列式 $D^*(p)$ 等于方程组 (22) 的行列式 $D(p)$. 因此, 在方程组 (30) 中阶数和行列式的次数之差比在方程组 (22) 中的小; 运用上叙变换有限次以后, 我们得到可标准化方程组.

现在假设

$$x^i = \varphi^i(t)\,, \quad i = 1,\cdots,n \tag{31}$$

是方程组 (22) 的某个解. 因为方程组 (22) 关于未知函数 x^i 的阶数等于 q_i, 所以假设函数 $\varphi^i(t)$ 是 q_i 次可微的. 由于变换 (29), 方程组 (22) 的解 (31) 对应于方程组 (30) 的解

$$y^i = \psi^i(t)\,, \quad i = 1,\cdots,n\,. \tag{32}$$

从关系式 (32) 看出, 函数 $\psi^i(t)$ 是 q_i 次可微的. 由以上的叙述得出, 从方程组 (22) 的每个解 (31), 得到方程组 (30) 的某个解 (32), 因此在把方程组 (22) 变到方程组 (30) 时, 没有一个解会失去. 由于一系列变换的结果, 我们得到可标准化的方程组, 它的解有任意给定次数的导数, 所以从变换 (28) 看出, 方程组 (22) 的解 (31) 也有任意给定次数的导数.

§12. 复数振幅法

在各种与振动过程有关的技术和物理领域内, **简谐振动**占有重要的地位. 在数学上简谐振动由函数

$$r\cos(\omega t + \alpha)\,, \quad r \geqslant 0 \tag{1}$$

给出. 其中 r 是振动的**振幅**, α 是它的**初位相**, 而数 ω 确定了振动的频率, 通常就称它为**频率**. 实际上, 如果 ν 是每秒钟的振动次数, 那么

$$\omega = 2\pi\nu\,,$$

因此 ω 是 2π 秒内而不是1秒内振动的次数. 我们已经看到过 (见§4中例题1) 方程

$$\ddot{x}+\omega^2x=0 \tag{2}$$

是以频率 ω 以及任意振幅和位相的简谐函数 (1) 作为它的通解. 方程 (2) 称为**简谐振荡方程**.

在简谐振动的研究中往往要涉及到方程

$$L(p)x=r\cos(\omega t+\alpha)\,, \tag{3}$$

其中右边是简谐函数. 由于简谐函数是拟多项式, 因而利用定理8中所说的方法容易求出方程 (3) 的解. 当多项式 $L(p)$ 是实系数的情形, 可以用另外的方式应用定理8, 这就是在电工学上称为**复数振幅法**的办法, 现在说明如下.

(A) 除了实简谐函数 (1) 之外, 我们还考虑与它**相对应的**复简谐函数

$$\rho e^{i\omega t}\,, \tag{4}$$

其中

$$\rho=re^{i\alpha}\,. \tag{5}$$

函数 (4) 具有这样的特性, 即它的实部与函数 (1) 一样:

$$\rho e^{i\omega t}=re^{i(\omega t+\alpha)}=r\cos(\omega t+\alpha)+ir\sin(\omega t+\alpha)\,.$$

复数 (5) 称为复简谐函数 (4) 的**复振幅**; 它把实振幅 r 和初位相 α 结合在一起. 应当注意,

$$r=|\rho|\,.$$

在多项式 $L(p)$ 是实系数的情况下, 为了求解方程 (3), 先来求解方程

$$L(p)z=\rho e^{i\omega t}\,. \tag{6}$$

由此即见, 如果 $z=x+iy$ 是方程 (6) 的解, 那么 x 是方程 (3) 的解. 假设 $i\omega$ 不是多项式 $L(p)$ 的根, 即

$$L(i\omega)\neq 0\,; \tag{7}$$

我们求 (见定理8) 方程 (6) 有复振幅 $\sigma=se^{i\beta}$ 的复简谐函数形式解 $z=\sigma e^{i\omega t}$. 把函数 $z=\sigma e^{i\omega t}$ 代入方程 (6), 我们得到

$$\sigma=\frac{\rho}{L(i\omega)} \tag{8}$$

(见§7,(B)). 因此, 方程 (3) 的解是如下形式的函数:

$$x=s\cos(\omega t+\beta)\,; \tag{9}$$

这个解的振幅 s 和初位相 β 由公式

$$se^{i\beta} = \frac{re^{i\alpha}}{L(i\omega)}$$

确定 (见 (8)). 特别, $s = |\sigma| = \dfrac{r}{|L(i\omega)|}$. 如果多项式 $L(p)$ 是稳定的, 那么关系式 (7) 显然满足. 在这种情况下, 方程 (3) 的任意一个解都有形式:

$$x = u + s\cos(\omega t + \beta), \tag{10}$$

其中 u 是齐次方程 $L(p)u = 0$ 的解. 这个齐次方程的解 u 当 $t \to +\infty$ 时趋向于零, 因此 (3) 的任意一个解都趋向于解 (9) . 解 (9) 称为**定态的**; 它对应于**定态**过程, 虽然解 (10) 描述的是**过渡**过程. 定态解 (9) 是所有解 (10) 中唯一的周期解.

当应用复数振幅法时通常不考虑实方程 (3) 的求解, 而直接从复方程 (6) 出发.

现在叙述应用到方程组上的复数振幅法. 问题是求出实系数方程组

$$\sum_{s=1}^{n} L_s^j(p)x^s = r^j\cos(\omega t + \alpha^j), \quad j = 1, \cdots, n \tag{11}$$

的特解, 其右边是具有同一频率 ω 的简谐振动.

(B) 我们假设方程组 (11) 的行列式 $D(p)$ (见 § 11, (A)) 当 $p = i\omega$ 时不为零. 为了求出方程组 (11) 的解, 我们先来求方程组

$$\sum_{k=1}^{n} L_k^j(p)z^k = \rho^j e^{i\omega t} \quad j = 1, \cdots, n \tag{12}$$

的解, 其中

$$\rho^j = r^j e^{i\alpha j}.$$

因为所有多项式 $L_k^j(p)$ 的系数都是实的, 所以从方程组 (12) 的每个解 $z^1, \cdots, z^n$, 得到方程组 (11) 的解

$$x^k = \operatorname{Re} z^k, \quad k = 1, \cdots, n.$$

求方程组 (12) 的形式为

$$z^k = \sigma^k e^{i\omega t}, \quad k = 1, \cdots, n \tag{13}$$

的解. 将函数 (13) 代入方程组 (12) (约去 $e^{i\omega t}$ 以后) 给出方程组

$$\sum_{k=1}^{n} L_k^j(i\omega)\sigma^k = \rho^j,$$

它关于未知数 σ^k 是可以唯一解出的, 因为根据假设, 这方程组的行列式 $D(i\omega)$ 不为零. 我们求出这个方程组的解, 并令

$$\sigma^k = s^k e^{i\beta^k};$$

那么根据 (13) 我们就得到方程组 (11) 的解

$$x^k = s^k \cos(\omega t + \beta^k), \quad k = 1, \cdots, n. \tag{14}$$

如果方程组 (11) 的行列式 $D(p)$ 是稳定多项式, 那么它满足不等式 $D(i\omega) \neq 0$, 且除此之外, 方程 (11) 的每个解与解 (14) 都相差一个当 $t \to +\infty$ 时趋向于零的项 (见 §11, (B)). 因此, 当多项式 $D(p)$ 是稳定的情况下, 方程组 (11) 的解 (14) 不仅是一个特解, 而且是**定态解**.

例题

我们来求解在简谐外力作用下的简谐振荡器方程

$$\ddot{x} + \omega_1^2 x = r\cos(\omega t + \alpha). \tag{15}$$

代替方程 (15), 我们考虑对应的复方程

$$\ddot{z} + \omega_1^2 z = re^{i(\omega t + \alpha)}. \tag{16}$$

如果 $\omega \neq \omega_1$, 那么方程 (16) 有形式为 $z = \sigma e^{i\omega t}$ 的解, 并且从公式 (8) 有

$$\sigma = \frac{re^{i\alpha}}{\omega_1^2 - \omega^2}.$$

因此, 方程 (15) 有解

$$x = \frac{r}{|\omega_1^2 - \omega^2|}\cos(\omega t + \beta), \tag{17}$$

其中当 $\omega_1 > \omega$ 时, $\beta = \alpha$; 当 $\omega_1 < \omega$ 时, $\beta = \alpha + \pi$. 公式 (17) 给出在简谐外力作用的下振荡器的**强迫振动**. 这里应该着重地注意到, 当出现**共振**现象时, 强迫振动的振幅

$$\frac{r}{|\omega_1^2 - \omega^2|}$$

随着差 $|\omega_1^2 - \omega^2|$ 的减小而**增大**. 我们也特别注意到, 振动 (17) 的位相 β 当 $\omega_1 > \omega$ 时和与强迫力的位相 α 重合, 而当 $\omega_1 < \omega$ 时与它相反. 方程 (15) 的通解写成形式:

$$x = r_1\cos(\omega_1 t + \alpha_1) + \frac{r}{|\omega_1^2 - \omega^2|}\cos(\omega t + \beta),$$

其中 $u = r_1\cos(\omega_1 t + \alpha_1)$ 是对应的齐次方程的解. u 这一项称为振荡器的**固有振动**.

如果 $\omega_1 = \omega$, 那么公式 (17) 失去意义. 这时应当求方程 (16) 形式为

$$z = \rho t e^{i\omega t}$$

的解, 其中 ρ 为复数 (见定理 8). 根据 § 10 中的公式 (9) 我们有

$$[(p + i\omega)^2 + \omega^2]\rho t = re^{i\alpha},$$

从而

$$\rho = \frac{re^{i\alpha}}{2i\omega}.$$

因此, 方程 (16) (当 $\omega_1 = \omega$ 时) 的特解有形式:

$$z = \frac{rte^{i(\omega t+\alpha)}}{2i\omega} = \frac{rte^{i(\omega t+\alpha-\pi/2)}}{2\omega},$$

而方程 (15) 的解成为

$$x = \frac{rt}{2\omega}\cos\left(\omega t + \alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{rt}{2\omega}\sin(\omega t + \alpha).$$

因此, 当 $\omega = \omega_1$ 而出现共振现象时, 振幅 $\frac{rt}{2\omega}$ 就变得逐渐无限地增大. 在实际的仪器中, 由于存在 "阻尼", 这个现象就观察不到.

§13. 电路

常微分方程理论在各种技术领域里找到了其自身的应用; 它应用于电子技术中, 特别是无线电技术. 无线电仪器的工作在某些理想化之下可以用常微分方程组来进行数学描述, 而且在这组方程中时间的未知函数就是流经仪器各个零件的电流强度, 或者是仪器各个连接点之间的电压降. 无线电仪器给出了很丰富的资料来说明微分方程理论的应用, 例如, 比起力学问题来要更丰富得多. 这种丰富性特别表现在从任何技术问题中产生的常微分方程组, 往往能用电子仪器来**模拟**, 也就是能设计出这样的电子仪器, 使得描述其工作的方程组与我们感兴趣技术对象的方程组是一样的. 这种模拟电子仪器在一定程度上可以帮助方程组的求解, 因为观察了仪器的工作状况, 我们也就看到了满足方程组的未知函数性态. 支配电子仪器工作的物理定律可以很简单地确定出来, 它们甚至于能很容易地由人们找到, 这对于物理学家来说, 几乎是不陌生的. 在这里, 有点教条式地给出最简单电子技术定律的陈述, 并引进了几个应用微分方程来研究电子仪器工作的例子.

电路的元件

电阻、电感 (自感) 和电容 (电容器) 是构成电子仪器的最重要零件. 这些零件中的每一个都是一个**二端网络**, 亦即有两个接点的网络, 在装配电子仪器时, 一个零件的两端和别的零件的端点相连接. 在电子仪器工作时, 构成该仪器的各个二端网络都有电流通过, 同时, 二端网络在每个时刻 t 的导电状态由两个量来表示: 从二端网络 ab 的一端 a 流向另一端 b 的**电流强度** $I_{ab}(t)$, 以及从 a 端到 b 端的**电压降** $U_{ab}(t)$. 电流强度 $I_{ab}(t)$ 可以取正号也可以取负号; 如果电流从 a 端**流向** b 端 (应注意这是所谓**技术上**的电流方向), 那么数 $I_{ab}(t)$ 是正的; 在相反的情况下是负的. 从 a 端到 b 端的电压降 $U_{ab}(t)$ 是 a 端与 b 端的电位差 $V_a(t) - V_b(t)$. 因此, 描述二端网络 ab 在时刻 t 状

态的两个量 $I_{ab}(t)$ 和 $U_{ab}(t)$ 与把哪一端标为第一点以及哪一端标为第二点有关. 在交换端点的顺序时, $I_{ab}(t), U_{ab}(t)$ 中的每个量显然都要变号, 因此有关系式

$$I_{ba}(t) = -I_{ab}(t)\,, \tag{1}$$

$$U_{ba}(t) = -U_{ab}(t)\,. \tag{2}$$

对于每个二端网络 ab, 时间 t 的函数 $I_{ab}(t)$ 和 $U_{ab}(t)$ 不是独立的, 而是由支配这个二端网络工作的物理定律所推出的某些关系式来联系. 对于电阻、自感和电容, 支配它们工作的物理定律在下面的命题中给出.

(A) 对于表示电阻的二端网络 ab, 有关系式 (欧姆定律)

$$U_{ab}(t) = R_{ab} I_{ab}(t) \tag{3}$$

成立, 这里 R_{ab} 是正的系数, 称为**电阻**, 并且对不同的二端网络可能取不同的值, 但是对于每一个给定的电阻二端网络它是常数; 这时我们总有

$$R_{ba} = R_{ab}\,. \tag{4}$$

对于表示电感的二端网络 ab, 有关系式

$$U_{ab}(t) = L_{ab}\frac{d}{dt}I_{ab}(t)\,; \tag{5}$$

成立, 这里 L_{ab} 是正的系数, 称为**电感**, 并且对不同的二端网络可能取不同的值, 但是对于每一个给定的电感二端网络它是常数. 这时

$$L_{ba} = L_{ab}\,. \tag{6}$$

对于电容 (电容器) 的二端网络 ab, 有关系式

$$I_{ab}(t) = C_{ab}\frac{d}{dt}U_{ab}(t)\,, \tag{7}$$

成立, 这里 C_{ab} 是正的系数, 称为**电容**, 并且对不同的二端网络可能取不同的值, 但是对于给定的电容二端网络有完全确定的值; 这时我们有

$$C_{ba} = C_{ab}\,. \tag{8}$$

积分关系式 (7), 我们得到

$$U_{ab}(t) = U_{ab}(t_0) + \frac{1}{C_{ab}}\int_{t_0}^{t} I_{ab}(t)dt\,. \tag{9}$$

函数

$$Q_{ab}(t) = C_{ab}U_{ab}(t)$$

是与在给定时刻电容器状态有关的物理量, 称为电容器 ab 的**电量**. 关系式 (9) 常常写成形式:

$$U_{ab}(t)=\frac{1}{C_{ab}}\int I_{ab}(t)dt\,,$$

其中 $\int I_{ab}(t)dt$ 表示电容器的电量.

关系式 (4) 可以从 (1),(2) 和 (3) 推出:

$$R_{ab}I_{ab}(t)=U_{ab}(t)=-U_{ba}(t)=-R_{ba}I_{ba}(t)=R_{ba}(-I_{ba}(t))=R_{ba}I_{ab}(t)\,.$$

关系式 (6) 和 (8) 也可以类似地建立起来.

在电子仪器的工作中, 两个电感之间的**互感**现象起着重要的作用.

(B) 两个有值 $L_{a_1b_1}=L_1$ 和 $L_{a_2b_2}=L_2$ 的电感 a_1b_1 和 a_2b_2 可能处于互感状态, 它用**互感系数** $M=M_{a_1b_1,a_2b_2}$ 来描述. 这时二端网络 a_1b_1 的电压降 $U_{a_1b_1}(t)=U_1(t)$ 不仅与电流 $I_{a_1b_1}(t)=I_1(t)$ 有关, 而且也与电流 $I_{a_2b_2}(t)=I_2(t)$ 有关. 完全一样地, 二端网络 a_2b_2 的电压 $U_{a_2b_2}(t)=U_2(t)$ 不仅与电流 $I_2(t)$, 而且也与 $I_1(t)$ 有关. 它们之间的关系由下列公式给出:

$$U_1(t)=L_1\frac{d}{dt}I_1(t)+M\frac{d}{dt}I_2(t)\,, \tag{10}$$

$$U_2(t)=L_2\frac{d}{dt}I_2(t)+M\frac{d}{dt}I_1(t)\,. \tag{11}$$

并且互感系数 $M_{a_1b_1,a_2b_2}$ 满足等式:

$$M_{a_1b_1,a_2b_2}=M_{a_2b_2,a_1b_1}=-M_{a_1b_1,b_2a_2}\,,$$

此外, 对于它们还有不等式

$$M^2\leqslant L_1L_2$$

成立. 两个电感的 "互相作用" 越大, 互感系数 M 在数量上就越接近于数值 $\sqrt{L_1L_2}$.

在命题 (A) 中所描述的二端网络称为**无源的**; 它们本身不可能在电子仪器中产生导电现象. 在电子仪器中出现电流的直接原因是要有**有源的**二端网络 —**电压源**和**电流源**.

(C) 对于电压源的二端网络 ab, 有关系式

$$U_{ab}(t)=U(t) \tag{12}$$

成立, 其中 $U(t)$ 是时间 t 的给定函数, 它描述了电压源的特征. 关系式 (12) 可以看成是函数 $U_{ab}(t)$ 和 $I_{ab}(t)$ 的联系, 不过只是这样的联系, 其中函数 $I_{ab}(t)$ 并不出现. 对于电流源 ab, 也有类似的关系式

$$I_{ab}(t)=I(t)$$

成立, 其中 $I(t)$ 是时间 t 的给定函数, 它描述了电流源的特征. 对于最经常讨论的电压源和电流源, 函数 $U(t)$ 和 $I(t)$ 或者是常数, 或者是形式为

$$r\cos(\omega t+\alpha)$$

的周期函数.

电子仪器就是由这些最重要且同时也是最简单的零件装配起来的. 仪器本身称为**电路**, 而装配成仪器的零件称为**元件**. 应当注意, 还有和上面所说不同的元件, 特别是有多个接点的**多端**元件. 例如**三极**电子管是**三端元件**, 它的工作状态将在后面进行分析 (见 §29).

基尔霍夫定律

我们现在转到叙述支配电路工作的**基尔霍夫** (Kirchhoff) **定律**.

(D) 所谓**电路**是指有限个元件 (特别是上述类型的二端网络) 这样的总体, 它们的各端连接成所谓电路的**节点**, 因而每一个节点连接着电路中两个或者两个以上的不同元件的端点. **基尔霍夫第一定律**断言; **在电路的每一个节点处从连接该节点所有元件流入这个节点的电流之和等于零**. 基尔霍夫第二定律是从如下的假设推出的: 在电路的每一个节点 a 处都有电位 $V_a(t)$, 而从节点 a 到节点 b 的电压降 $U_{ab}(t)$ 为节点 a 和 b 的电位差, 因此 $U_{ab}(t)=V_a(t)-V_b(t)$. 由此假设推出: **如果** $a,b,c,\cdots,h,k$ **是组成闭合回路的一系列节点, 那么就有关系式**

$$U_{ab}(t)+U_{bc}(t)+\cdots+U_{hk}(t)+U_{ka}(t)=0$$

成立, 这就是**基尔霍夫第二定律**. 它可以简述如下: **沿电路的任一闭合回路的电压降之和等于零**. (在这些基尔霍夫定律的叙述中并没有假设电路中的元件是二端网络.) 我们现在要给应用在由二端网络组成的电路的基尔霍夫定律以更确切的说明.

(E) 设 S 是某个由二端网络组成的电路. 基尔霍夫第一定律断定, 如果 a 是电路 S 的任一节点, 而 $b_1a,b_2a,\cdots,b_qa$ 是所有连接在节点 a 处的二端网络 (见图 7), 那么

$$I_{b_1a}(t)+I_{b_2a}(t)+\cdots+I_{b_qa}(t)=0\,.$$

基尔霍夫第二定律断定, 如果 $ab,bc,\cdots,hk,ka$ 是出现在电路 S 中的某一个二端网络序列 (后面一个二端网络的起点是前一个二端网络的终点, 图 8), 那么

$$U_{ab}(t)+U_{bc}(t)+\cdots+U_{hk}(t)+U_{ka}(t)=0\,.$$

计算由二端网络组成的电路的工作状态, 就是要求找出在电路中每一个二端网络的电流和电压; 因此, 如果电路是由 n 个二端网络构成, 那么摆在我们面前就是求出 $2n$ 个时间函数的问题. 支配每一个二端网络工作的规律给出未知函数之间的一个关系式, 因此对于 $2n$ 个未知函数, 我们已经有了 n 个关系式. 其余 n 个关系式由基尔

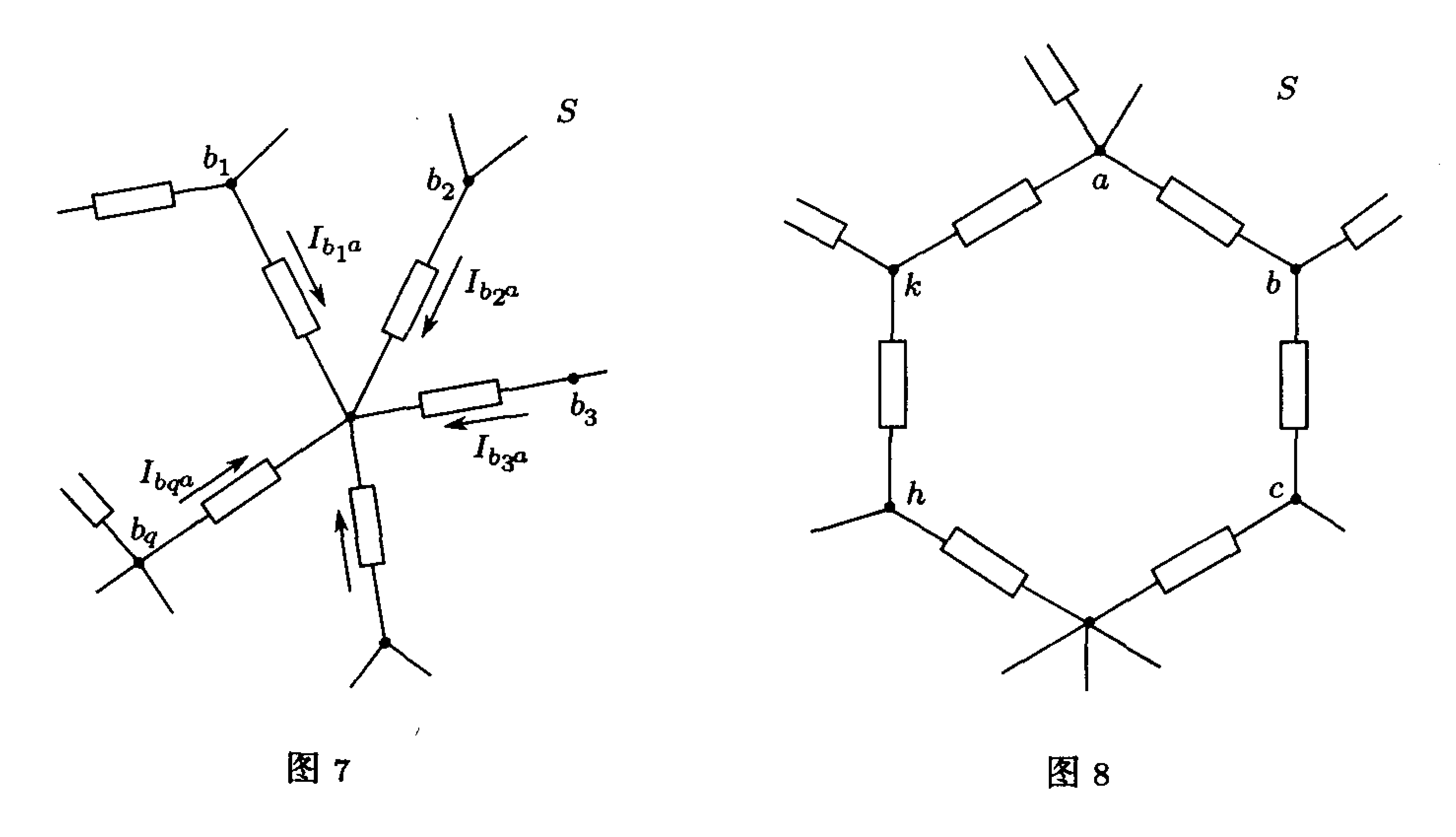


图 7　　图 8

霍夫定律给出. 可以证明, 基尔霍夫定律正好给出 n 个相互之间独立的关系式, 但是在这里我们不去证明它. 因此利用所有这些关系式, 最后我们就得到关于 $2n$ 个未知函数的 $2n$ 个方程. 这些方程中的一部分是微分方程, 一部分是有限 (代数) 方程. 基尔霍夫定律给出有限方程, 首先应当利用它们来消去一部分未知函数; 这时通常是利用以下两种方法之一来实现的. 第一种方法可以取电流作为基本的未知函数, 并通过它们来表示电压. 这时首先要利用基尔霍夫第一定律, 把所有电流 (根据这个定律) 用最小数目的独立函数表示出来. 这些独立的电流, 称为**回路电流**. 然后应当利用基尔霍夫第二定律, 把其中的每个电压换成它相应的电流表达式. 这种方法称为**回路电流法**. 第二种方法是取二端网络的电压作为基本未知函数, 而电流 (利用支配每个二端网络工作的规律) 通过电压来表示, 在这种情况下, 应当通过基尔霍夫第二定律把所有电压 (根据这个规律) 用最小数目的独立函数表示出来. 这些独立的电压称为**节点电压**. 然后应当利用基尔霍夫第一定律, 把其中的每个电流换成它相应的电压表达式. 这种方法称为**节点电压法**.

二端网络的算子阻抗

在转到分析电路计算的例题前, 我们采用符号记法来写出关系式 (3), (5), (9), (10), (11), 也就是支配二端网络工作的规律.

(F)　设 ab 是电阻, 电感或者电容的二端网络. 我们令

$$U_{ab}(t)=U(t),\quad I_{ab}(t)=I(t),\quad R_{ab}=R,\quad L_{ab}=L,\quad C_{ab}=C.$$

若作为对以前所用符号记法的补充 (见 §7, (A)), 自然地引进记号 $\frac{1}{p}f(t)=\int f(\tau)d\tau$, 那么关系式 (3),(5),(9) 可以用一个公式记为

$$U(t)=Z(p)I(t) \tag{13}$$

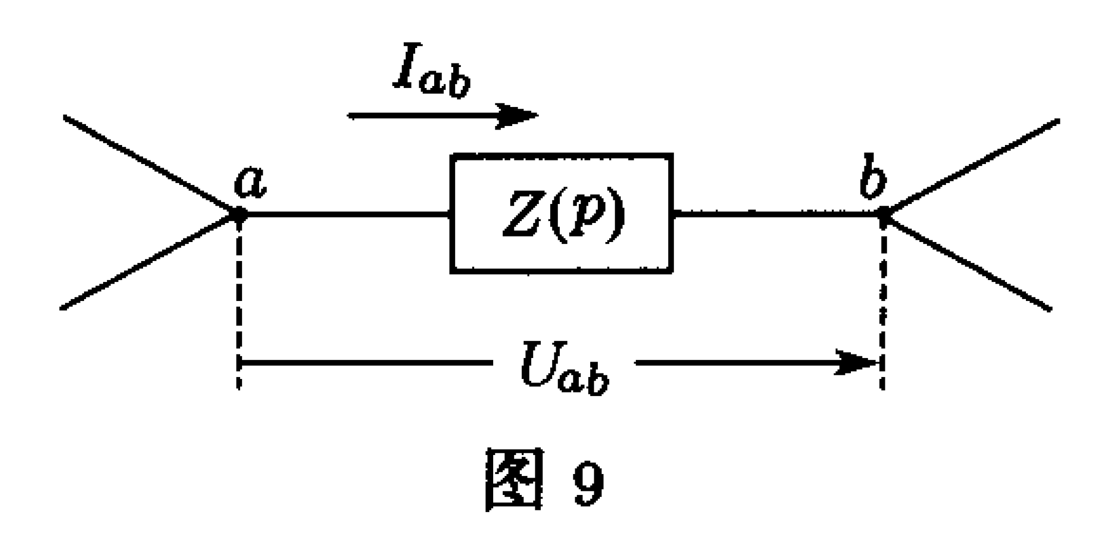


图 9

(图 9), 其中 $Z(p) = R$, $Z(p) = Lp$, $Z(p) = \frac{1}{Cp}$. 函数 $Z(p)$ 称为二端网络 ab 的**算子阻抗**. 对于电容, 它不是多项式, 而是有理函数 $\frac{1}{Cp}$:

$$U(t) = \frac{1}{Cp} I(t). \tag{14}$$

关系式 (14) 乘以 Cp 之后, 就有通常的形式 $I(t) = CpU(t)$, 这里只有 p 的多项式. 如果令

$$G(p) = \frac{1}{Z(p)},$$

那么关系式 (13) 有形式:

$$I(t) = G(p)U(t).$$

函数 $G(p)$ 称为二端网络 ab 的**算子导纳**; 且有对应的形式:

$$G(p) = \frac{1}{R}, G(p) = \frac{1}{Lp}, G(p) = Cp.$$

关系式 (10) 和 (11) 在算子记法下取形式:

$$U_1(t) = L_1 p I_1(t) + Mp I_2(t),$$

$$U_2(t) = L_2 p I_2(t) + Mp I_1(t).$$

我们转到例题的分析. 为了清楚起见, 把电路用图来表示, 在图上以点与电路的节点相对应, 以线段或曲线与每个二端网络相对应, 把这些线段或曲线与相应节点连接起来; 在每个这样的线段上, 标出相应于二端网络的约定符号 (图 10).

例题

1. (振荡回路) 设 S 是有四个节点 a, b, c, d 的电路, 由四个二端网络 ab, bc, cd, da 组成 (图 11). 二端网络 ab 是电感 L, 二端网络 bc 是电阻 R, 二端网络 cd 是电容; 最后, 二端网络 ad 是电源 $U_{ad}(t) = U(t)$. 我们利用回路电流法来进行计算, 对节点 b 应用基尔霍夫第一定律, 得到 $I_{ab}(t) + I_{cb}(t) = 0$, 或者用另一个形式, $I_{ab}(t) = I_{bc}(t)$. 当在一个节点处正好两个二端网络相连接时, 总是这样的. 因此我们有

$$I_{ab}(t) = I_{bc}t) = I_{cd}(t) = I_{da}(t) = I(t).$$

这里 $I(t)$ 就是**回路电流**. 其次, 对于每个二端网络写出支配它工作的规律, 我们得到

$$\begin{cases} U_{ab}(t) = LpI(t), & U_{ab}(t) = RI(t), \\ U_{cd}(t) = \frac{1}{Cp} I(t), & U_{da}(t) = -U(t). \end{cases} \tag{15}$$

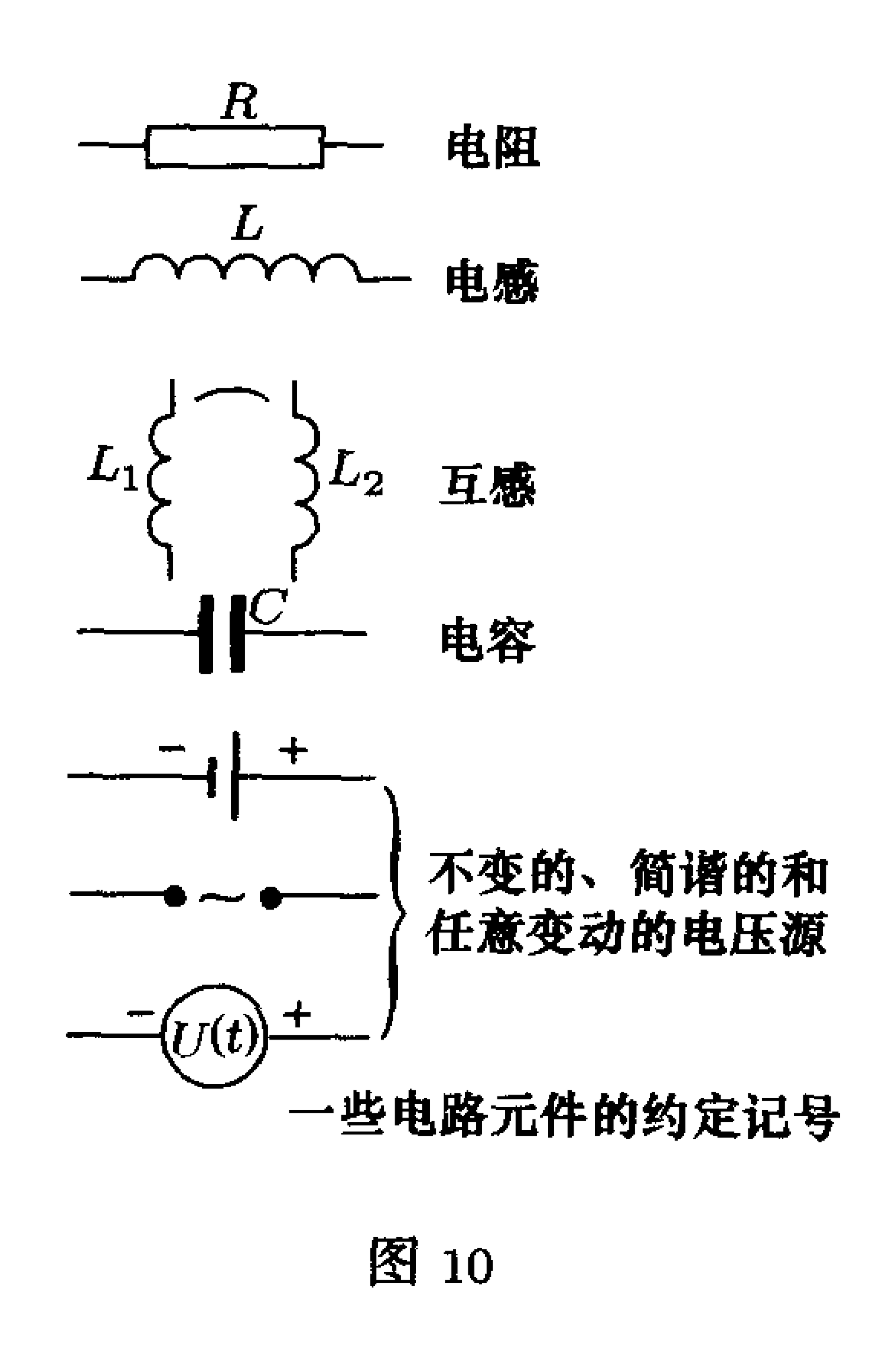


图 10

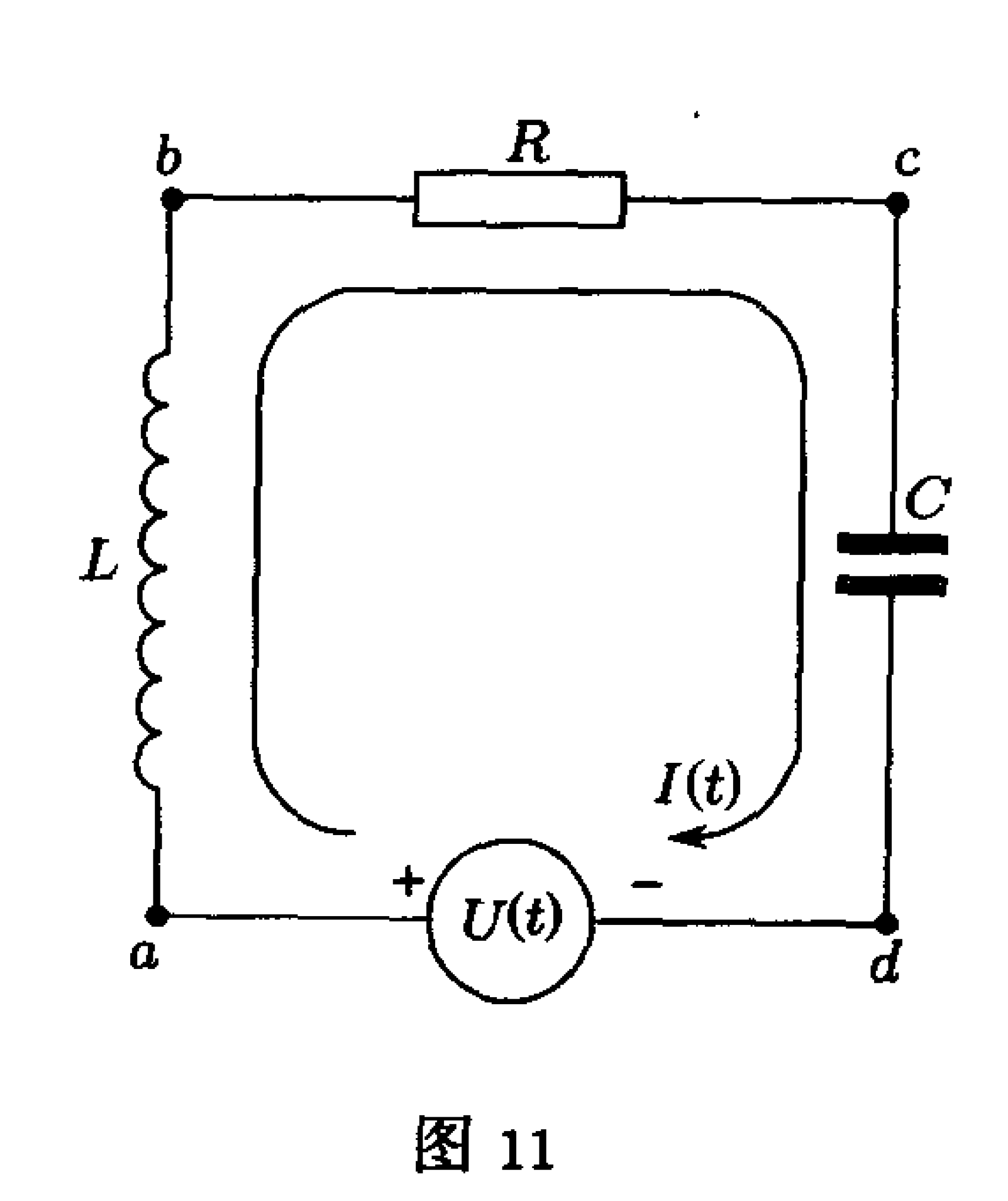


图 11

基尔霍夫第二定律给出

$$U_{ab}(t)+U_{bc}(t)+U_{cd}(t)+U_{da}(t)=0. \tag{16}$$

从关系式 (15) 和 (16) 得到

$$\left(Lp+R+\frac{1}{Cp}\right)I(t)=U(t). \tag{17}$$

可以对关系式 (17) 的两边乘以 p (亦即逐项求导)；于是我们得到

$$\left(Lp^2+Rp+\frac{1}{C}\right)I(t)=pU(t). \tag{18}$$

这就是讨论回路的微分方程.

如果从回路中除去二端网络 ad, 那么我们就得到所谓**断开电路**, 它由三个无源的二端网络 ab, bc, cd 所组成. 可以把整个这样的电路看作为两端 a 和 d 的二端网络 (见图 12). 对于这样的二端网络, 支配它工作的规律是由类似于关系式 (13) 的关系式 (17) 给出. 这里函数 $Z(p)=Lp+R+\dfrac{1}{Cp}$ 是**算子阻抗**, 而它的倒数 $G(p)=\dfrac{Cp}{LCp^2+RCp+1}$ 是**算子导纳**.

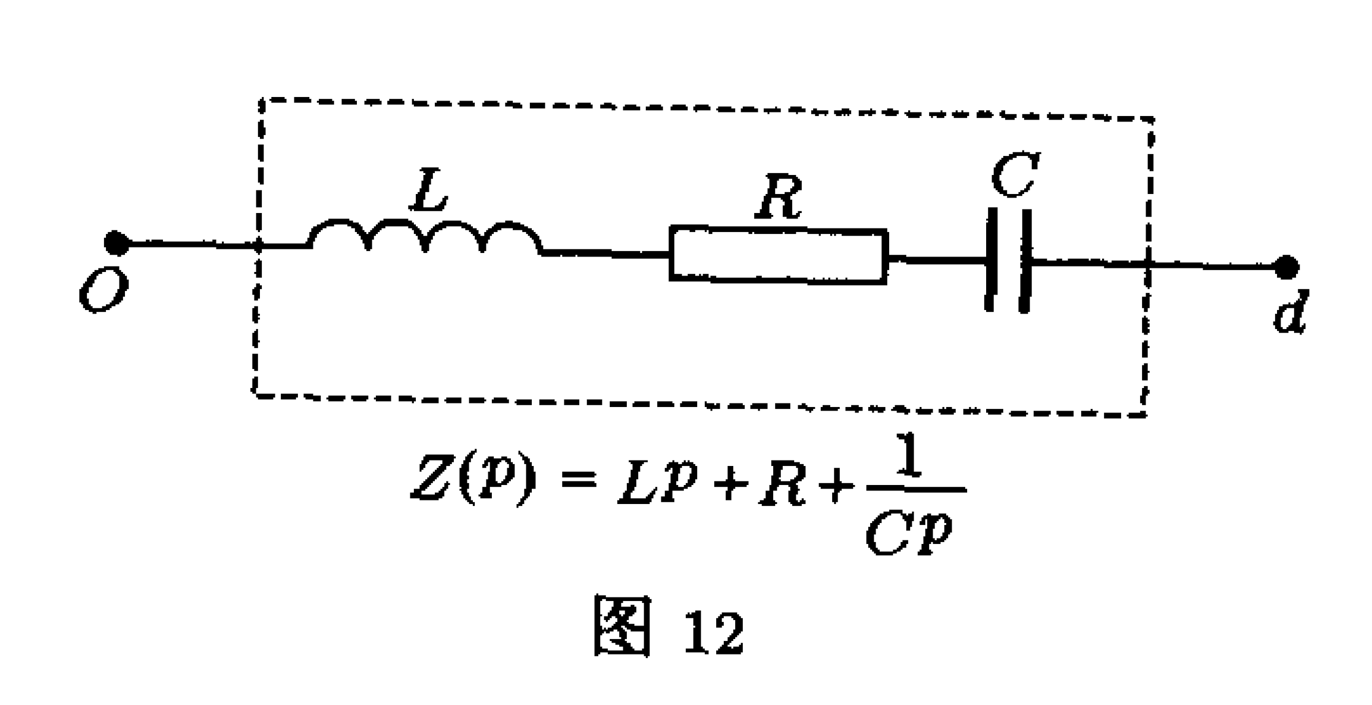


图 12

如果我们令 $U(t)=0$, 那么这就等价于在我们的回路中不存在有源二端网络 ad 的假设, 而电路就由三个无源的二端网络 ab, bc, cd 所组成, 并且节点 a 和 d 重合 (见图 13). 写出这个无源电路 S^* 工作规律的方程, 有形式:

$$\left(Lp^2+Rp+\frac{1}{C}\right)I(t)=0. \tag{19}$$

图 13

正如前面指出过的, 在无源电路中导电现象不会自动发生, 而函数 $I(t)\equiv 0$ 是方程 (19) 的特解, 就反映了这一事实. 但是在认为电路中已经有了电流, 就可以考察电路 S^* 的工作, 并且搞清楚这个电流是怎样随时间变化的. 设 λ_1 和 λ_2 是多项式

$$Lp^2+Rp+\frac{1}{C} \tag{20}$$

的根. 由于 L, R, C 大于零 (见 (A)), 所以根 λ_1 和 λ_2 的实数部分是负的, 因此在电路 S^* 中电流是随着时间而衰减 (参看 §9,(A)), 但是这种衰减可以通过不同的方式进行; 如果根 λ_1 和 λ_2 是复数, 那么方程 (19) 的每个非零解都有振动特性 (参看 §7 中例题 3); 如果两个根都是实的, 那么衰减是非周期地进行, 也就是方程 (19) 的每个解从某个时刻起都成为单调的. 至于根 λ_1 和 λ_2 究竟是复的还是实的, 就由数

$$\Delta=\left(\frac{R}{2L}\right)^2-\frac{1}{LC}$$

的符号来决定; 如果 $\Delta<0$, 那么方程 (19) 的解就具有振动特性, 如果 $\Delta>0$, 那么它就是非周期的.

特别有趣的是这样的振荡回路 S^*, 这时在回路中完全没有电阻 R. 在这种情况下电路只由两个无源元件 ab 和 cd 组成, 而且 $b=c, a=d$ (图 14). 在这样的假定下, 电路方程有形式:

$$\left(p^2+\frac{1}{LC}\right)I(t)=0.$$

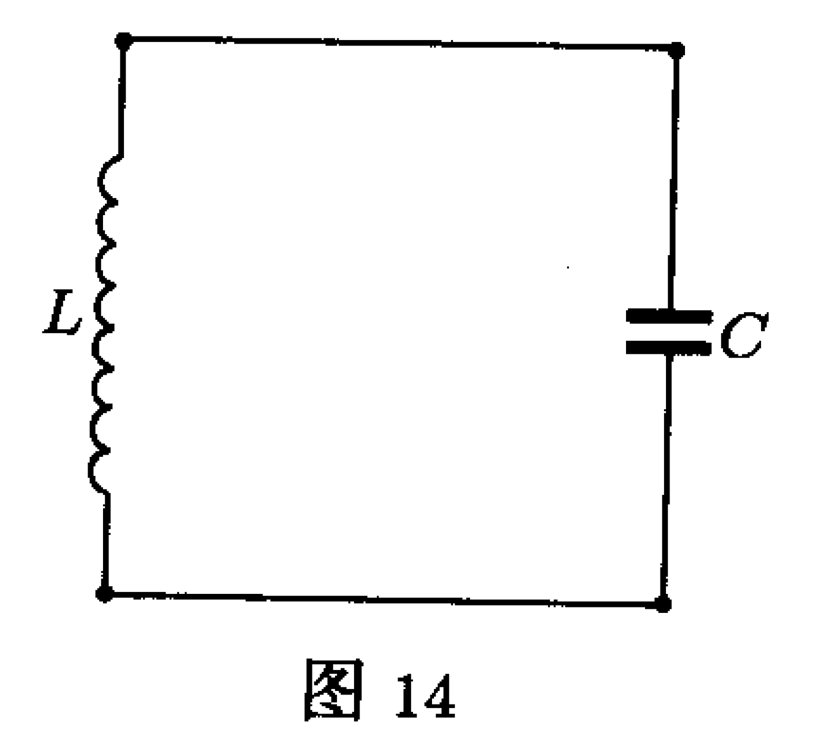


图 14

这个方程的通解写成形式:

$$I(t)=s\cos(\omega_1 t+\beta),$$

其中 $\omega_1=\dfrac{1}{\sqrt{LC}}$. 因此, 当没有电阻时, 在无源振荡回路中发生频率为

$$\omega_1=\frac{1}{\sqrt{LC}}$$

的非衰减振荡. 在通常情况下量 $\dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ 就称为振荡回路 S^* 的**固有频率**.

现在回到振荡回路 S 的讨论, 并考察有简谐电压源 $U(t)$ 的情形.

由于多项式 (20) 的根有负实部, 所以可以考察电路 S 中的定态过程. 现在按照复数振幅法来进行求解 (参看 § 12). 设 $U(t)=re^{i\omega t}$ 是有实振幅 $r>0$ 的复简谐振动. 那么方程 (18) 的右边有形式:

$$pU(t)=p\left(re^{i\omega t}\right)=ir\omega e^{i\omega t}.$$

我们有

$$I_{\text{定态}}=\sigma e^{i\omega t},$$

而且电流 $I_{\text{定态}}$ 的复数振幅 σ 用下面公式确定 (参看 § 12, (A)) :

$$\sigma=\frac{ir\omega}{iR\omega+\left(-L\omega^2+\dfrac{1}{C}\right)}=\frac{r}{R+i\left(L\omega-\dfrac{1}{C\omega}\right)}.$$

由此我们得到实振幅:

$$s=|\sigma|=\frac{r}{\sqrt{R^2+\left(L\omega-\dfrac{1}{C\omega}\right)^2}}.$$

从这个公式看出, 对于给定振幅为 r 的电压源, 当 ω 等于回路 S 的固有频率, 即 $\omega=\omega_1=\dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ 时, 电流强度的振幅 s 达到最大值. 对于这个频率, 振幅 s 和 r 由关系式 $s=\dfrac{r}{R}$ 相联系, 也就是说对于这个频率, 回路进行得好像其中只有电阻一样. 对于其他的频率, 电流强度的振幅 s 都是比 $\dfrac{r}{R}$ 小的值. 这种现象称为**共振**(见 § 12, 例题). L, R, C 振荡回路在频率 ω 等于它的固有频率 $\dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ 时产生共振.

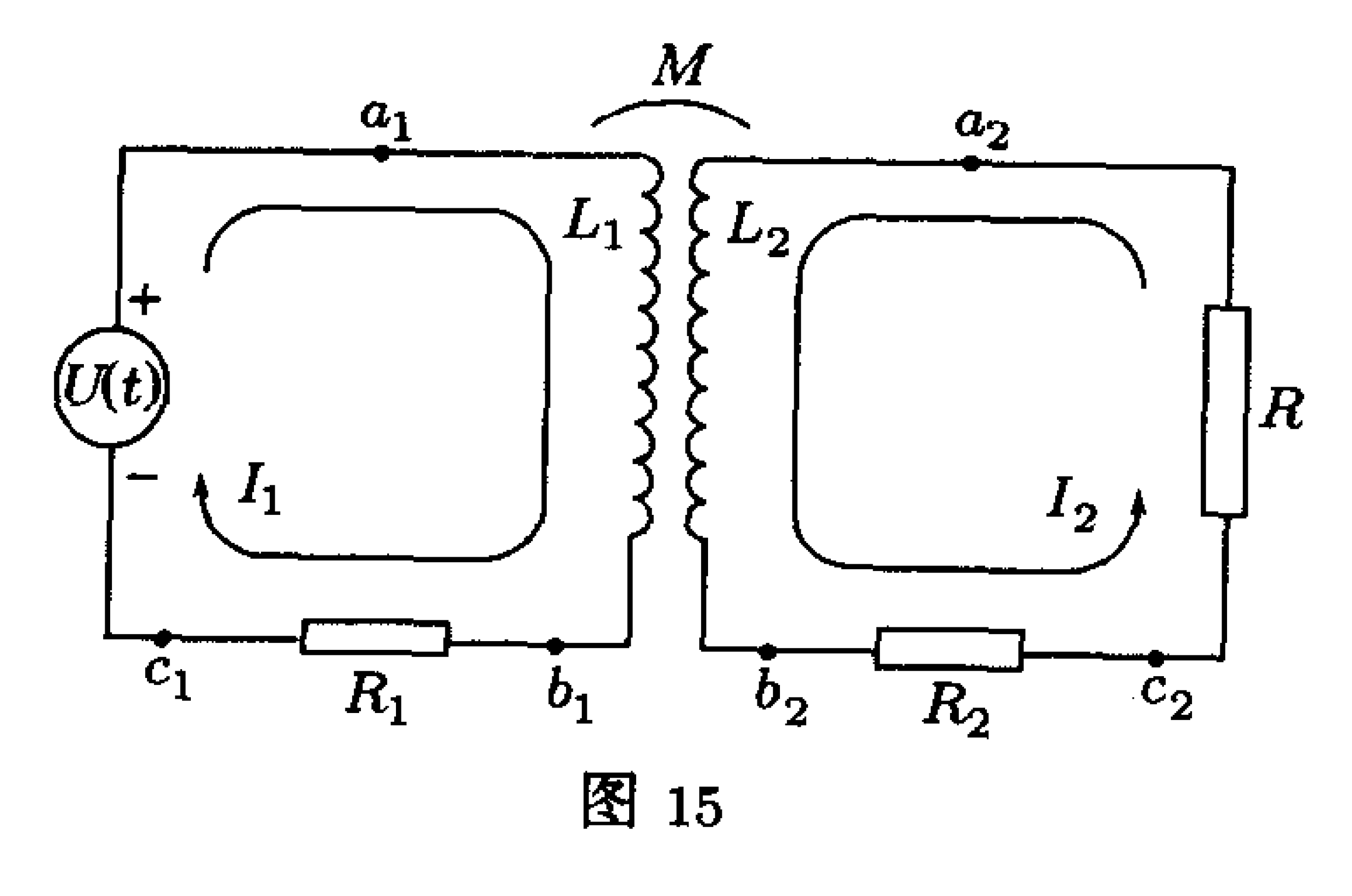


图 15

2. (变压器) 变压器是由安装在同一轴上的 **原绕组** 和 **感应绕组** 两个绕组构成. 原绕组连接在可变电压源上, 感应绕组连接在负载上, 例如连接在外电阻上. 每一绕阻都有电感和电阻 (内电阻). 在绕组之间有互感. 因此, 变压器可以看成由两个用互感联系起来的分开回路组成的电路. 第一个回路由三个二端网络组成: a_1b_1 是电感 L_1; b_1c_1 是内电阻 R_1; a_1c_1 是电压源 $U_{a_1c_1}(t)=U(t)$. 第二个回路也由三个二端网络组成: a_2b_2 是电感 L_2; b_2c_2 是内电阻 R_2; c_2a_2 是负载电阻 R. 此外还有互感 $M_{a_1b_1,a_2b_2}=M$ (图 15). 根据基尔霍夫第一定律, 我们有

$$I_{a_1b_1}=I_{b_1c_1}=I_{c_1a_1}=I_1;\quad I_{a_2b_2}=I_{b_2c_2}=I_{c_2a_2}=I_2.$$

因此, 我们有两个回路电流 I_1, I_2. 应用基尔霍夫第二定律, 得到

$$L_1pI_1 + MpI_2 + R_1I_1 - U(t) = 0,$$

$$L_2pI_2 + MpI_1 + R_2I_2 + RI_2 = 0.$$

或者写成另一个形式

$$(L_1p + R_1)I_1 + MpI_2 = U(t),$$

$$MpI_1 + (L_2p + R_2 + R)I_2 = 0.$$

这个方程组的系数行列式有形式:

$$D(p) = (L_1L_2 - M^2)p^2 + (L_1R_2 + L_1R + L_2R_1)p + R_1(R_2 + R).$$

根据§9中的命题(B), 这个多项式是稳定的 (因为 $L_1L_2 - M^2 > 0$). 我们来讨论当电压 $U(t)$ 简谐变化时变压器的工作状况, 并将按照§12,(B)的方法求出定态解. 我们令

$$U(t) = u_1e^{i\omega t},$$

其中 u_1 是正实数 (对原绕阻所加电压的振幅). 我们求出形式为

$$I_1 = \sigma_1e^{i\omega t}, \quad I_2 = \sigma_2e^{i\omega t}$$

的未知函数 I_1, I_2, 其中 σ_1, σ_2 是电流的复振幅.

在理论上最感兴趣的是**理想变压器**, 也就是这样的变压器, 在其中量 R_1, R_2 和 $L_1L_2 - M^2$ 很小. 在确定 σ_1 和 σ_2 的方程中略去这些量, 我们得到

$$L_1 \cdot i\omega\sigma_1 + M \cdot i\omega\sigma_2 = u_1,$$

$$M \cdot i\omega\sigma_1 + (L_2 \cdot i\omega + R)\sigma_2 = 0.$$

由于 $M \approx \sqrt{L_1L_2}$, 所以在用 $\sqrt{\dfrac{L_2}{L_1}}$ 乘第一个方程, 并从第二个方程减去所得的方程, 我们得到

$$R\sigma_2 = -\sqrt{\frac{L_2}{L_1}}\,u_1.$$

因此, 在负载 R 上电压降的振幅 $u_2 = R|\sigma_2|$ 等于

$$u_2 = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}}\,u_1;$$

量 $\sqrt{\dfrac{L_2}{L_1}}$ 称为**变压器系数**. 因此, 如果 $L_2 > L_1$, 那么我们得到增压变压器

$$\frac{u_2}{u_1} > 1;$$

而当 $L_2 < L_1$ 时, 我们得到降压变压器

$$\frac{u_2}{u_1} < 1 .$$

3. (电子滤波器) 我们考察有四个节点 a,b,c,d 和五个二端网络的电路 (图 16): ab 是电感 L, bc 是具有同样量 L 的电感, bd 是电容 C, ad 是电压源 $U_{ad}(t) = U(t)$, cd 是负载电阻 R.

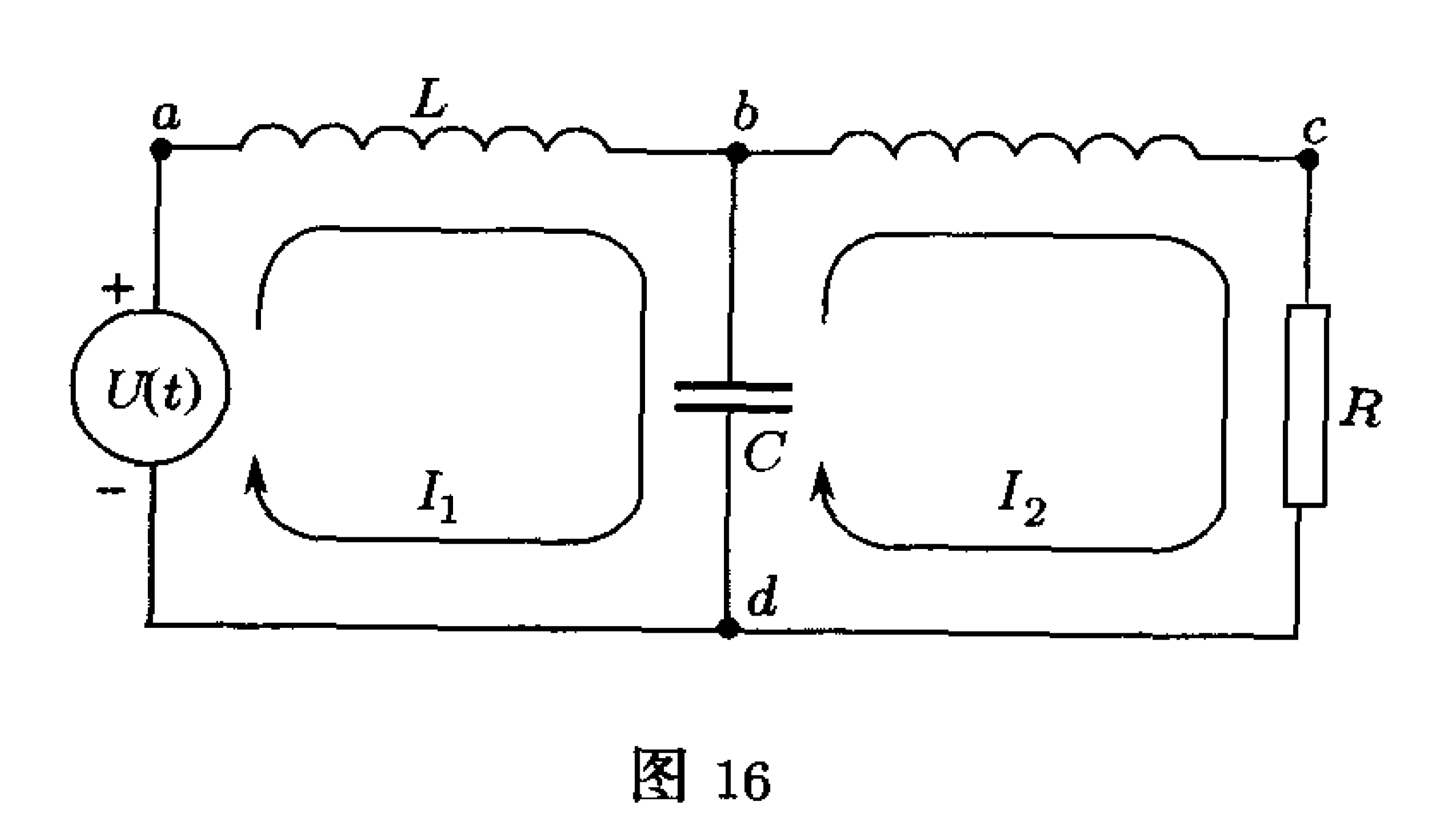


图 16

我们假设

$$I_{ab} = I_1 , \quad I_{bc} = I_2 .$$

于是由基尔霍夫第一定律我们有

$$I_{bd} = I_1 - I_2 , \quad I_{cd} = I_2 .$$

根据基尔霍夫第二定律得到

$$\begin{aligned} U_{ab} + U_{bc} + U_{cd} + U_{da} &= 0 , \\ U_{bc} + U_{cd} + U_{db} &= 0 , \end{aligned}$$

或者

$$\begin{aligned} LpI_1 + LpI_2 + RI_2 - U(t) &= 0 , \\ LpI_2 + RI_2 + \frac{1}{Cp}(I_2 - I_1) &= 0 . \end{aligned}$$

将第二个方程乘以 p, 我们得到以如下的方程组:

$$LpI_1 + (Lp + R)I_2 = U(t) ,$$

$$-\frac{1}{C}I_1 + \left(Lp^2 + Rp + \frac{1}{C}\right)I_2 = 0 .$$

这个方程组的行列式有形式:

$$D(p) = L^2p^3 + LRp^2 + \frac{2Lp}{C} + \frac{R}{C} .$$

根据定理6, 多项式$D(p)$是稳定的. 现在我们将认为$U = b\,e^{i\omega t}$, 其中b是电压的实振幅 (见§12). 我们求形式为

$$I_1 = a_1 e^{i\omega t}, \quad I_2 = a_2 e^{i\omega t}$$

的未知函数I_1和I_2, 其中a_1和a_2是电流的复振幅, 也就是限于寻求定态解.

我们提出确定在负载上的电压降$U_{cd} = RI_2$问题. 我们有

$$a_2 = \frac{\dfrac{b}{C}}{\left(\dfrac{R}{C} - LR\omega^2\right) + i\omega\left(\dfrac{2L}{C} - L^2\omega^2\right)},$$

由此求得电压U_{cd}的振幅$a = |a_2|R$:

$$a = |a_2|R = \frac{\dfrac{bR}{C}}{\sqrt{\left(\dfrac{R}{C} - LR\omega^2\right)^2 + \omega^2\left(\dfrac{2L}{C} - L^2\omega^2\right)^2}}.$$

对于小的频率ω, 我们有$\dfrac{a}{b} \approx 1$; 换句话说, 低频电压容易通过滤波器传送出去, 振幅几乎没有改变. 而对于大的频率ω, 我们有

$$\frac{a}{b} \approx \frac{R}{CL^2\omega^3},$$

因此, 高频电压几乎不能通过而被"滤掉"了.

§14. 标准的常系数线性齐次方程组

在这一节要将讨论常系数方程组

$$\dot{x}^i = \sum_{j=1}^{n} a_j^i x^j, \quad i = 1, \cdots, n \tag{1}$$

的求解. 这个方程组可以用消去法来求解 (见§11, 特别是§11中例题2). 这里是通过把矩阵$A = (a_j^i)$化为若尔当型的方法来求解的. 当矩阵A的所有特征值都互不相同时, 把它化成若尔当型, 这时即为对角型的可能性是很初等的代数学事实. 在一般情况下, 化矩阵A为若尔当型的可能性涉及到线性代数教程中比较复杂的结果. 本书下面只用到本节的那些结果, 它们依靠矩阵A在特征值为互不相同的情况下把它化成对角型; 后面并不需要用到在一般情况下可以把矩阵A化成若尔当型的结果 (命题(C),(D),(G)), 从而在阅读时可以放过去.

为了求解方程组 (1) 而把矩阵 A 化成若尔当标准型时, 通常都采用对未知函数$x^1, \cdots, x^n$ 进行线性变换的方法. 这个方法将在本节最后以标题"变量的变换"来讲

述. 在本节的第一部分要讲述另一个方法, 它实质上也是依靠把矩阵 A 化成若尔当型.

在这一节中我们不把矩阵 A 与在向量 $\boldsymbol{x}=(x^1,\cdots,x^n)$ 的空间中和它相对应的变换 $\boldsymbol{A}$ 加以区别, 因为我们并不需要改变空间的基底, 只在证明命题 (F) 时是例外.

特征方程的根全是单根的情形

(A) 在向量形式下微分方程组 (1) 写成

$$\dot{\boldsymbol{x}}=A\boldsymbol{x}, \tag{2}$$

这里 $A=(a_j^i)$. 代替未知函数组 $x^1,\cdots,x^n$, 引进未知向量

$$\boldsymbol{x}=(x^1,\cdots,x^n);$$

向量 $\boldsymbol{x}$ 的导数 $\dot{\boldsymbol{x}}$ 理解为向量 $(\dot{x}^1,\cdots,\dot{x}^n)$. 如果 $\boldsymbol{h}$ 是矩阵 A 对应于特征值 λ 的特征向量, 亦即如果 (见 § 34,(B))

$$A\boldsymbol{h}=\lambda\boldsymbol{h},$$

那么由关系式

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{h}e^{\lambda t}$$

所确定的向量函数 $\boldsymbol{x}$ 就是方程 (2) 的解.

最后的结论可用把 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{h}e^{\lambda t}$ 代入关系式 (2) 的办法进行验证.

定理 10 设

$$\dot{\boldsymbol{x}}=A\boldsymbol{x} \tag{3}$$

是这样的微分方程组(见 (A)), 其矩阵 A 的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 两两不同, 且设

$$\boldsymbol{h}_1,\cdots,\boldsymbol{h}_n$$

是这个矩阵对应的特征向量. 令

$$\boldsymbol{x}_i=\boldsymbol{h}_ie^{\lambda_it},\quad i=1,\cdots,n. \tag{4}$$

于是向量函数

$$\boldsymbol{x}=c^1\boldsymbol{x}_1+\cdots+c^n\boldsymbol{x}_n \tag{5}$$

是方程 (3) 的解, 其中 $c^1,\cdots,c^n$ 是任意常数, 并且这个公式给出了方程 (3) 所有的解.

证明 由于命题 (A), 每个函数 $\boldsymbol{x}_i$ 都是方程 (3) 的解, 所以根据 § 6 命题 (A), 公式 (5) 总是给出方程 (3) 的解. 现在证明, 方程 (3) 的任一解都可以写成 (5) 的形式.

设 $\varphi(t)$ 是方程 (3) 的任一解. 由定理 3, 解 $\varphi(t)$ 可以认为是给定在整个无限直线 $-\infty < t < +\infty$ 上的, 因此这个解在 $t = 0$ 时有定义. 令 $\varphi(0) = \boldsymbol{x}_0$. 设

$$\boldsymbol{x}_0 = c^1\boldsymbol{h}_1 + \cdots + c^n\boldsymbol{h}_n$$

是向量 $\boldsymbol{x}_0$ 按基底向量 $\boldsymbol{h}_1, \cdots, \boldsymbol{h}_n$ 的展开式 (根据 § 34 中命题 (C), 向量 $\boldsymbol{h}_1, \cdots, \boldsymbol{h}_n$ 构成基底). 那么由公式 (5) 所确定的解 $\boldsymbol{x}$ 显然满足初始条件

$$\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0\,,$$

而解 $\varphi(t)$ 也满足同样的初始条件 $\varphi(0) = \boldsymbol{x}_0$; 因此由唯一性定理 (见定理 2) 有 $\boldsymbol{x} = \varphi(t)$. 于是, 定理 10 得证.

在方程 (3) 的矩阵 (a^i_j) 是实矩阵的情况下, 那么在我们面前就提出如何从所有的解 (5) 中分出实解的问题.

(B) 假设决定 (3) 的矩阵 (a^i_j) 是实的, 并且选取向量 $\boldsymbol{h}_1, \cdots, \boldsymbol{h}_n$ 使得实的特征值对应于实向量, 复共轭的特征值对应于复共轭的向量. 那么在解组 (4) 中, 每个实特征值就对应于实解, 每一对复共轭的特征值就对应于一对相互复共轭的解. 可以证明, **在解 (5) 中当且仅当实解前面是实常数, 复共轭解前面是复共轭常数时解 (5) 才是实的**.

命题 (B) 的正确性直接从 § 7 中命题 (D) 推出.

一般情形

现在转到在一般情况下 (矩阵 (a^i_j) 可能有重特征值) 方程组 (1) 的求解. 对于这种情况的分析, 要用到很不简单且证明也相当复杂的关于把矩阵化成若尔当型的代数学定理 (见 § 36).

(C) 我们把方程组 (1) 写成向量形式:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x}\,, \tag{6}$$

并令

$$\boldsymbol{h}_1, \cdots, \boldsymbol{h}_k$$

为关于矩阵 A 与特征值 λ 对应的某一向量系列 (见 § 36,(A)), 因此它们满足关系式

$$A\boldsymbol{h}_1 = \lambda\boldsymbol{h}_1\,, \quad A\boldsymbol{h}_2 = \lambda\boldsymbol{h}_2 + \boldsymbol{h}_1\,, \quad \cdots, \quad A\boldsymbol{h}_k = \lambda\boldsymbol{h}_k + \boldsymbol{h}_{k-1}\,.$$

我们引进一个向量函数序列, 即令

$$\boldsymbol{w}_r(t) = \frac{t^{r-1}}{(r-1)!}\boldsymbol{h}_1 + \frac{t^{r-2}}{(r-2)!}\boldsymbol{h}_2 + \cdots + \boldsymbol{h}_r\,, \quad r = 1, \cdots, k\,. \tag{7}$$

于是向量函数

$$\boldsymbol{x}_r = \boldsymbol{w}_r(t)e^{\lambda t}\,, \quad r = 1, \cdots, k \tag{8}$$

就是方程 (6) 的解, 并且有

$$\boldsymbol{x}_r(0) = \boldsymbol{h}_r\,. \tag{9}$$

因此, 对于每一个 k 个向量系列就对应着一组 k 个解.

为了证明向量函数 (8) 是方程 (6) 的解, 我们指出关于向量函数 (7) 的如下两个恒等式:

$$\dot{\boldsymbol{w}}_r(t) = \boldsymbol{w}_{r-1}(t)\,, \quad r = 1, \cdots, k\,,$$

$$A\boldsymbol{w}_r(t) = \lambda\boldsymbol{w}_r(t) + \boldsymbol{w}_{r-1}(t)\,, \quad r = 1, \cdots, k\,.$$

在这些关系式中取 $\boldsymbol{w}_0(t) = 0$; 这两个恒等式通过简单的计算即可验证. 借助于这两个恒等式可以直接验证 (8) 是方程 (6) 的解. 事实上, 我们有

$$\dot{\boldsymbol{x}}_r(t) = \dot{\boldsymbol{w}}_r(t)e^{\lambda t} + \lambda\boldsymbol{w}_r(t)e^{\lambda t} = (\boldsymbol{w}_{r-1}(t) + \lambda\boldsymbol{w}_r(t))e^{\lambda t} = A\boldsymbol{w}_r(t)e^{\lambda t} = A\boldsymbol{x}_r(t)\,.$$

现在我们转到叙述和证明在一般情况下关于方程组 (1) 解的定理.

定理 11 设

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} \tag{10}$$

是方程组 (1) 的向量写法. 由于定理 30 (见 § 36), 存在基

$$\boldsymbol{h}_1, \cdots, \boldsymbol{h}_n\,,$$

它是由关于矩阵 A 的系列所组成. 为了确定起见, 假设 $\boldsymbol{h}_1, \cdots, \boldsymbol{h}_{k_1}$ 是对应于特征值 λ_1 的系列; $\boldsymbol{h}_{k_1+1}, \cdots, \boldsymbol{h}_{k_1+k_2}$ 是对应于特征值 λ_2 的系列等等. 根据命题 (C), 每一个系列对应着一个解组, 因此我们可以写出方程 (10) 如下的解:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{h}_1 e^{\lambda_1 t}, \cdots, \boldsymbol{x}_{k_1} = \left(\dfrac{t^{k_1-1}}{(k_1-1)!}\boldsymbol{h}_1 + \cdots + \boldsymbol{h}_{k_1}\right)e^{\lambda_1 t}, \\ \boldsymbol{x}_{k_1+1} = \boldsymbol{h}_{k_1+1} e^{\lambda_2 t}, \cdots, \boldsymbol{x}_{k_1+k_2} = \left(\dfrac{t^{k_2-1}}{(k_2-1)!}\boldsymbol{h}_{k_1+1} + \cdots + \boldsymbol{h}_{k_1+k_2}\right)e^{\lambda_2 t}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases} \tag{11}$$

于是, 公式

$$\boldsymbol{x} = c^1\boldsymbol{x}_1 + \cdots + c^n\boldsymbol{x}_n \tag{12}$$

总是给出方程 (10) 的解, 其中 $c^1, \cdots, c^n$ 是任意常数, 并且方程 (10) 的每个解都可以用公式 (12) 来表示.

证明 因为函数 $\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ 是方程 (10) 的解 (见 (C)), 所以由 § 6 的命题 (A), 公式 (12) 总是给出方程 (10) 的解. 我们来证明方程 (10) 的每一个解在常数 $c^1, \cdots, c^n$ 的适当选取之下, 总可以写成 (12) 的形式. 令 $\varphi(t)$ 为方程 (10) 的任一解, 由定理 3, 解

$\varphi(t)$ 可以认为是定义在整个直线 $-\infty < t < +\infty$ 上的, 所以向量 $\varphi(0) = \boldsymbol{x}_0$ 有定义. 把这个向量关于基 $\boldsymbol{h}_1, \cdots, \boldsymbol{h}_n$ 展开:

$$\boldsymbol{x}_0 = c^1\boldsymbol{h}_1 + \cdots + c^n\boldsymbol{h}_n\,.$$

现在如果把找到的常数 $c^1, \cdots, c^n$ 代入关系式 (12), 那么我们就得到解 $\boldsymbol{x}(t)$, 它满足初始条件 (见 (9))

$$\boldsymbol{x}(0) = c^1\boldsymbol{x}_1(0) + \cdots + c^n\boldsymbol{x}_n(0) = c^1\boldsymbol{h}_1 + \cdots + c^n\boldsymbol{h}_n = \boldsymbol{x}_0\,.$$

这样一来, 解 $\varphi(t)$ 和 $\boldsymbol{x}(t)$ 有相同的初始值, 因而它们是一样的. 于是定理 11 证毕.

现在剩下的问题是在实矩阵 (a^i_j) 的情况下, 如何从公式 (12) 给出的解中分出实解来. 这完全和特征方程只有单根的情形一样地进行.

(D) 我们假设决定方程 (10) 的矩阵 (a^i_j) 是实的. 在这种情况下, 按照定理 30 (见 §36) 中当矩阵 (a^i_j) 是实的情形时所规定的方法选取基底 $\boldsymbol{h}_1, \cdots, \boldsymbol{h}_n$. 在这样选取的基底之下, 定理 11 所作出的解系列 (11) 中有一部分是实的, 另一部分是成对复共轭的. 于是, 解 (12) 是实的当且仅当实解前面的常数是实的, 而复共轭解前面的常数是复共轭的.

命题 (D) 直接从 §7 中的命题 (D) 推出.

最后, 应当注意这一节上面讲述的结果与 §7,§8 的结果是有密切联系的. 在 §7, §8 中所考虑的是一个 n 阶常系数齐次方程. 按照 §4 中的方法, 这个方程可以写成含有 n 个一阶方程的标准方程组形式. 因此, §7,§8 两节的结果可以从本节的结果中推出. 这时可以证明, 所得到标准方程组的特征多项式与原来方程的特征多项式完全相同.

变量的变换

(E) 在由常数矩阵 $A = (a^i_j)$ 决定的方程组 (1) 中, 代替未知函数

$$x^1, \cdots, x^n, \tag{13}$$

我们引进新的未知函数

$$y^1, \cdots, y^n; \tag{14}$$

令

$$y^j = \sum_{i=1}^{n} s^j_i x^i, \quad j = 1, \cdots, n, \tag{15}$$

其中 s^j_i 是常系数, 它们构成非退化矩阵 $S = (s^j_i)$. 对于新的未知函数, 我们的方程组写成形式:

$$\dot{y}^j = \sum_{i=1}^{n} b^j_i y^i, \quad j = 1, \cdots, n, \tag{16}$$

其中矩阵 $B=(b_i^j)$ 是从矩阵 A 按公式

$$B=SAS^{-1} \tag{17}$$

得到的. 我们来证明这件事. 将关系式 (15) 的两边对 t 求导, 即得

$$\dot{y}^j=\sum_{i=1}^{n} s_i^j \dot{x}^i\,, \quad j=1,\cdots,n\,. \tag{18}$$

因此, 向量 $\dot{\boldsymbol{x}}=(\dot{x}^1,\cdots,\dot{x}^n)$ 的分量受到与向量 $\boldsymbol{x}=(x^1,\cdots,x^n)$ 的分量同样的变换. 由此就已经推出公式 (17) (见 § 34 ,(A)). 但是我们还是从头进行证明. 在矩阵的形式下, (15) 和 (18) 分别写为形式:

$$\boldsymbol{y}=S\boldsymbol{x}\,, \quad \dot{\boldsymbol{y}}=S\dot{\boldsymbol{x}}\,;$$

因此我们有

$$\dot{\boldsymbol{y}}=S\dot{\boldsymbol{x}}=SA\boldsymbol{x}=SAS^{-1}\boldsymbol{y}\,.$$

这就证明了公式 (17) .

用适当的方法选取矩阵 S, 我们可以使得矩阵 B 取得最简单的形式. 因为矩阵 A 到矩阵 B 的变换 (17) 是利用矩阵 S 的相似变换, 所以我们可以做到使得矩阵 B 有若尔当型 (见 § 36 ,(B)).

(F) 如果方程组 (1) 中矩阵 A 的特征值

$$\lambda_1\,,\ \cdots\,,\ \lambda_n$$

都互不相同, 那么可以选取线性变换 (15) , 使得方程组 (16) 有形式:

$$\dot{y}^k=\lambda_k y^k\,, \quad k=1,\cdots,n\,. \tag{19}$$

此外, 如果矩阵 A 是实的, 因而在特征值序列 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 中除了每个复的特征值 λ_k 之外, 还有与它共轭的特征值 $\lambda_l=\overline{\lambda}_k$, 而变量 (13) 是实的, 所以可以选取变换 (15) , 使得每个实的特征值 λ_j 对应于实的变量 y^j , 而成对复共轭的特征值 λ_k 和 λ_l , 对应于复共轭的变量 y^k 和 $y^l=\overline{y}^k$. 因此, 共轭的特征值对应于共轭的方程

$$\dot{y}^k=\lambda_k y^k\,, \quad \dot{\overline{y^k}}=\overline{\lambda}_k\overline{y^k}\,. \tag{20}$$

假设

$$\lambda_k=\mu_k+i\nu_k\,, \quad \nu^k=\xi^k+i\eta^k\,, \tag{21}$$

其中 μ_k,ν_k,ξ^k,η^k 都是实的. 于是一对相互共轭的方程 (20) 可以换成一对实的方程

$$\dot{\xi}^k=\mu_k\xi^k-\nu_k\eta^k\,, \quad \dot{\eta}^k=\nu_k\xi^k+\mu_k\eta^k\,. \tag{22}$$

对于每一对复共轭的特征值都做这样的变换, 我们就可以把实变量 (13) 的方程组变换成新的实变量方程组, 而且新方程组中一部分方程有 (19) 的形式 (对于实的特征值 λ_j), 而另一部分有 (22) 的形式 (对于成对的复共轭特征值).

为了证明命题 (F) , 在向量 $\boldsymbol{x}=(x^1,\cdots,x^n)$ 的空间 R 中, 进行与矩阵 A 相对应的线性变换 $\boldsymbol{A}$ (见 § 34), 并用 $\boldsymbol{h}_k$ 记与变换 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 λ_k 相对应的特征向量. 现在我们取向量

$$\boldsymbol{h}_1,\cdots,\boldsymbol{h}_n \tag{23}$$

作为 $\boldsymbol{R}$ 的基, 并把向量 $\boldsymbol{x}$ 关于这个基的坐标记为 $y^1,\cdots,y^n$. 这样我们就得到了线性变换 (15) . 在新坐标系之下变换 $\boldsymbol{A}$ 对应于矩阵 B , 容易看出, 它有对角形, 而且在对角线上的元素是数 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$. 因此, 方程组 (16) 有 (19) 的形式.

现在如果矩阵 A 是实的, 那么对于每个实的特征值 λ_j , 以实的特征向量 $\boldsymbol{h}_j$ 与它对应, 而对于一对复共轭的特征值 λ_k 和 $\lambda_l=\overline{\lambda}_k$, 用一对复共轭的特征向量 $\boldsymbol{h}_k$ 和 $\boldsymbol{h}_l=\overline{\boldsymbol{h}}_k$ 与其对应. 任意向量 $\boldsymbol{x}$ 在新坐标之下写成形式:

$$\boldsymbol{x}=\sum_{j=1}^{n} y^j \boldsymbol{h}_j\,, \tag{24}$$

并且如果它是实的, 那么在实向量之前的系数应当是实的, 而复共轭向量之前的系数必须是复共轭的 (见 § 7 ,(D)). 因此, 每个实特征值 λ_j 对应于实变量 y^j , 而一对复共轭特征值 λ_k 和 $\lambda_l=\overline{\lambda}_k$ 对应于复共轭变量 y^k 和 $y^l=\overline{y^k}$.

为了从一对复共轭的方程 (20) 转化成一对实的方程 (22) , 我们写出方程 (20) , 其中数值 λ_k 和 y^k 用 (21) 的右端代替, 于是得到

$$\dot{\xi}^k+i\dot{\eta}^k=(\mu_k+i\nu_k)(\xi^k+i\eta^k)=\mu_k\xi^k-\nu_k\eta^k+i(\nu_k\xi^k+\mu_k\eta^k)\,.$$

分别比较这个关系式的实部和虚部, 就得到方程组 (22) .

于是命题 (F) 得证.

方程组 (19) 有明显的解

$$y^k=c_k e^{\lambda_k t}, \quad k=1,\cdots,n\,.$$

但是为了得到原来方程组 (3) 的解, 需要从未知函数 (14) 化成未知函数 (13) , 而为此就需要知道矩阵 A 的特征向量 (23) (见 (24)). 因此, 命题 (F) 等价于定理 10 .

为了在一般情况下求解方程组 (1) , 可以利用将矩阵 A 化成若尔当型; 这里得到的命题 (G) 等价于定理 11 .

(G) 设方程组 (1) 的矩阵 A 是任意的. 我们这样选取变换 (15) , 使得矩阵 B 有若尔当型 (见 § 36). 设 λ 是矩阵 A 的一个特征值, 又 k 是矩阵 B 对应于特征值 λ 的一个若尔当块的阶数. 假设这一块位于 B 的前 k 行. 于是对应于这一块的方程组有形式:

$$\dot{y}^1=\lambda y^1+y^2\,,\ \dot{y}^2=\lambda y^2+y^3\,,\ \cdots,\ \dot{y}^{k-1}=\lambda y^{k-1}+y^k\,,\ \dot{y}^k=\lambda y^k\,.$$

矩阵 B 的每个其他若尔当块都对应于类似的方程组, 它们都是容易求解的.

例题

1. 应用这一节所讲的方法来求解方程组 (1), 需要找出由关于变换 $\boldsymbol{A}$ 特征值的系列构成向量空间的基 (见定理 11)

$$\boldsymbol{h}_1, \cdots, \boldsymbol{h}_n .$$

这种寻找本身就是一个代数问题. 我们指出, 根据本节的结果, 利用**待定系数法**就可以求解方程 (1), 而不要找出由系列构成的基. 设 λ 是矩阵 (a_j^i) 的某个特征值. 一般来说, 在基 $\boldsymbol{h}_1, \cdots, \boldsymbol{h}_n$ 之中存在几个对应于这个特征值系列; 设 k 是对应于特征值 λ 的各系列中长度最大的. 根据定理 11, 每个对应于特征值 λ 的解都可以写成形式:

$$x^i = f^i(t)e^{\lambda t}, \quad i = 1, \cdots, n, \tag{25}$$

其中 $f^i(t)$ 是次数 $\leqslant k-1$ 的多项式. 因此, 把形式 (25) 的解代入方程组 (1), 并把多项式 $f^i(t), i = 1, \cdots, n,$ 的系数看成是未知常数, 我们利用待定系数法求得方程组 (1) 所有对应于特征值 λ 的解. 在用这种方法求解方程组 (1) 时, 并不需要知道对应于特征值 λ 的系列, 而只需要知道这些系列的**长度**. 求出长度的问题是比化成若尔当标准型更简单的代数问题; 这个问题的解决与线性代数的**矩阵的初等因子理论**有关. 初等因子理论在本书的其他地方都不用.

2. 我们现在来说明如何利用在 § 11 中讲述的消去法来求解方程组 (1), 为了运用消去法, 我们把方程组 (1) 写成形式:

$$\sum_{j=1}^{n} L_j^i(p)x^j = 0,$$

其中

$$L_j^i(p) = a_j^i - p\delta_j^i .$$

在这种情况下, 矩阵 $(L_j^i(p))$ 的行列式 $D(p)$ 就是矩阵 (a_j^i) 的特征多项式. 设 λ 是多项式 $D(p)$ 的某个根, 或者同样地, 是矩阵 (a_j^i) 的某个特征值. 根 λ 的重数记为 l. 根据 § 11 中命题 (C), 方程组 (1) 所有对应于根 λ 的解都应当在形式:

$$x^i = g^i(t)e^{\lambda t}, \quad i = 1, \cdots, n$$

之下进行寻找, 其中多项式 $g^i(t)$ 的次数不超过数 $l-1$. 如果将这个例题所说的方法与例题 1 给出的方法进行比较, 那么我们看出整个差别在于多项式最大次数的确定. 例题 1 给出了多项式次数更准确的确定, 因为一般来说, 数 k 小于数 l. 实际上, 对应于特征值 λ 的**所有**系列长度之和等于 l, 因此, 等式 $k = l$ 仅在对应于特征值 λ 只有一个系列时才能成立.

§15. 自治的微分方程组及其相空间

这里将在**自治**方程组的**相空间**形式下给出该方程组的几何解释. 这种解释本质上不同于在§1,§3中对方程组所作的几何解释, 正确地说, 这里的解释并不是几何学的而是动力学的, 因为在这种解释中, 与方程组的每个解相对应的不是空间曲线, 而是点沿曲线的运动. 动力学的解释 (相空间) 在某些关系上比起几何解释 (积分曲线族) 更为深刻.

自治方程组

如果在常微分方程组中自变量 (或者如我们将称它为**时间**) t 不明显出现, 我们就称它为**自治的**. 这就意味着, 描述方程组未知函数的整体变化规律, 正像通常物理定律也是这样, 并不随着时间的推移而改变. 显然容易证明, 如果

$$x^i = \varphi^i(t), \quad i = 1, \cdots, n$$

是某个自治方程组的解, 那么

$$x^i = \varphi_*^i(t) = \varphi^i(t+c), \quad i = 1, \cdots, n$$

也是同一个自治方程组的解, 其中 c 为常数. 我们以**标准**自治方程组作为例子来对这个事实进行说明.

(A) 设

$$\dot{x}^i = f^i(x^1, \cdots, x^n), \quad i = 1, \cdots, n \tag{1}$$

是 n 阶标准自治方程组, 而

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$$

是它的向量写法. 方程组 (1) 的自治性在于函数 $f^i(x^1, \cdots, x^n), i = 1, \cdots, n$ 是变量 $x^1, \cdots, x^n$ 的函数而和时间 t **无关**. 关于函数 $f^i(x^1, \cdots, n)$, 我们假设它们是定义在 n 维空间的某个开集 Δ 上, 这里空间点的坐标为变量 $x^1, \cdots, x^n$. 我们还假设, 函数 $f(x^1, \cdots, x^n)$ 和它们的一阶偏导数在集合 Δ 上连续. 于是如果

$$x^i = \varphi^i(t), \quad i = 1, \ldots, n \tag{2}$$

是方程组 (1) 的解, 那么

$$x^i = \varphi_*^i(t) = \varphi^i(t+c), \quad i = 1, \cdots, n \tag{3}$$

也是方程组 (1) 的解.

从复合函数的求导规则推出关系式

$$\dot{\varphi}_*^i(t) = \dot{\varphi}^i(t+c), \quad i = 1, \cdots, n. \tag{4}$$

实际上,

$$\begin{aligned}\dot{\varphi}_*^i(t) &= \frac{d}{dt}\varphi_*^i(t) = \frac{d}{dt}\varphi^i(t+c)\\ &= \frac{d}{d(t+c)}\varphi^i(t+c)\cdot\frac{d(t+c)}{dt} = \dot{\varphi}^i(t+c)\cdot 1 = \dot{\varphi}^i(t+c)\,.\end{aligned}$$

现在证明 (3) 是方程组 (1) 的解. 由于 (2) 是解, 所以我们有恒等式

$$\dot{\varphi}^i(t) = f^i(\varphi^1(t),\cdots,\varphi^n(t)),\quad i=1,\cdots,n\,.$$

在这恒等式中将 t 换成 $t+c$, 就得到

$$\dot{\varphi}^i(t+c) = f^i(\varphi^1(t+c),\cdots,\varphi^n(t+c)),\quad i=1,\cdots,n\,.$$

由此以及 (4) 和 (3) 得出

$$\begin{aligned}\dot{\varphi}_*^i(t) &= \dot{\varphi}^i(t+c) = f^i(\varphi^1(t+c),\cdots,\varphi^n(t+c))\\ &= f^i(\varphi_*^1(t),\cdots,\varphi_*^n(t))\,.\end{aligned}$$

现在转到方程组 (1) 解的动力学解释. 这里形式上讨论的是关于在 n 维空间中的解释, 但是为了直观起见, 想像平面的情形 ($n=2$) 更为合理.

(B) 对于自治方程组 (1) 的每一个解

$$x^i = \varphi^i(t),\quad i=1,\cdots,n, \tag{5}$$

我们以 n 维空间中点的运动与它对应, 这个点的运动由方程 (5) 给出, 其中 $x^1,\cdots,x^n$ 就是空间点的坐标, 而 t 为时间. 点在运动的过程中描出某一曲线 —— 运动的**轨线**. 如果把解 (5) 不比拟为运动过程而看成点的运动轨线, 那么我们就得到关于解的不很完全表示, 因此最好在轨线上譬如指出运动的方向. 于是, 如果除了解 (5) 之外还有另一个解

$$x^i = \psi^i(t),\quad i=1,\cdots,n, \tag{6}$$

那么对应于这两个解的轨线, 或者在空间中不相交, 或者重合. 也就是说, 如果两条轨线至少有一个公共点, 亦即

$$\varphi^i(t_1) = \psi^i(t_2),\quad i=1,\cdots,n, \tag{7}$$

那么

$$\psi^i(t) = \varphi(t+c),\quad 其中\ c = t_1 - t_2\,. \tag{8}$$

最后的等式说明第一个解和第二个解所描出的轨线是彼此一样的, 可是第一个解描出与第二个解完全一样但带有 "滞后" 时间 c 的轨线. 如果与第一个解对应的点在时

刻$t+c$到达轨线上的某个位置, 那么与第二个解对应的点已经在时刻t到过这个位置了.

为了从等式(7)推出恒等式(8), 除了解(5)之外, 我们还考虑解 (见(A))

$$\varphi_*^i(t)=\varphi^i(t+c). \tag{9}$$

当$c=t_1-t_2$时, 由等式(7)推出等式

$$\varphi_*^i(t)=\varphi^i(t_2+c)=\varphi^i(t_1)=\psi^i(t_2),\quad i=1,\cdots,n.$$

于是方程组(1)的解(6)和(9)有共同的初始条件 (也就是在时刻t_2的值), 从而根据唯一性定理, 它们是一样的. 因此我们有

$$\psi^i(t)=\varphi_*^i(t)=\varphi^i(t+c),\quad i=1,\cdots,n.$$

平衡位置和闭轨线

我们提出关于方程组解所描出的轨线能否自己相交的问题.

(C) 令

$$x^i=\varphi^i(t),\quad i=1,\cdots,n \tag{10}$$

是方程组(1)的某个解. 我们假设等式

$$\varphi^i(t_1)=\varphi^i(t_2),\quad i=1,\cdots,n;\quad t_1\neq t_2 \tag{11}$$

成立, 这里数t_1和t_2当然是属于解(10)的定义区间$r_1<t<r_2$. 于是在这个条件之下, 解(10)可以延拓到整个无限区间$-\infty<t<+\infty$. 因此我们立即认为解(10)本身就是定义在这个$-\infty<t<+\infty$的区间上. 于是只可能有如下两种互相排斥的情形.

1) 对所有t的值有等式

$$\varphi^i(t)=a^i,\quad i=1,\cdots,n$$

成立, 其中$(a^1,\cdots,a^n)$是集合Δ中一个不依赖于t的点. 因此在这种情况下, 当t变动时, 点$(\varphi^1(t),\cdots,\varphi^n(t))$实际上不运动而停在原地. 这时, 解(10)本身以及点$(a^1,\cdots,a^n)$就称为方程组(1)的**平衡位置**.

2) 存在这样一个正数T, 使得对任意的t有等式

$$\varphi^i(t+T)=\varphi^i(t),\quad i=1,\cdots,n$$

成立. 但是当$|\tau_1-\tau_2|<T$时, 至少对一个$i=1,\cdots,n$有不等式

$$\varphi^i(\tau_1)\neq\varphi^i(\tau_2)$$

成立. 在这种情况下, 称解 (10) 为以 T 为周期的**周期解**, 而称解 (10) 描写的轨线为**闭轨线**或者**环**.

我们来证明命题 (C) . 正如在命题 (B) 中已经注意到那样, 由等式 (11) 推出恒等式

$$\varphi^i(t+c)=\varphi^i(t),\quad i=1,\cdots,n;\quad c=t_1-t_2. \tag{12}$$

这时函数 $\varphi^1(t+c),\cdots,\varphi^n(t+c)$ 也是方程组 (1) 的解 (见 (A)). 这个解与原来的解 (10) 在它们都有定义的区间上是一样的 (定理 2). 如果将这两个解合并起来, 我们就得到一个具有比原来更大存在区间的新解, 亦即当 $c>0$ 时有区间 $r_1-c<t<r_2$, 而当 $c<0$ 时有区间 $r_1<t<r_2-c$. 由于 t_1 和 t_2 是平等的, 所以可以改变数量 c 的符号, 于是这个解可以延拓到区间 $r_1-|c|<t<r_2+|c|$ 上. 此外, 由于对延拓解来说, 等式 (11) 仍然成立, 所以可再一次应用上述方法去扩展存在区间, 从而可以延拓解 (10) 到整个无限直线上而保持恒等式 (12) .

我们将称每一个满足恒等式 (12) 的数 c 为解 (10) 的**周期**; 以 F 记解 (10) 所有周期的集合. 集合 F 是某个数的集合. 我们来建立它的一些性质. 在关系式 (12) 中将 t 换成 $t-c$, 得到 $\varphi^i(t)=\varphi^i(t-c)$. 因此, 如果 c 是周期, 那么 $-c$ 也是周期. 假设 c_1 和 c_2 都是周期, 即

$$\varphi^i(t+c_1)=\varphi^i(t),\quad \varphi^i(t+c_2)=\varphi^i(t),\quad i=1,\cdots,n.$$

那么

$$\varphi^i((t+c_2)+c_1)=\varphi^i(t+c_2)=\varphi^i(t),\quad i=1,\cdots,n.$$

因此, 如果 c_1 和 c_2 都是周期, 那么 c_1+c_2 也是周期. 令 $c_1,c_2,\cdots,c_m,\cdots$ 是一个收敛于某个数 c_0 的周期序列, ; 于是我们有

$$\varphi^i(t+c_m)=\varphi^i(t),\quad i=1,\cdots,n;\quad m=1,2,\cdots.$$

因为函数 $\varphi^i(t)$ 是连续的, 所以当 $m\to+\infty$ 时, 我们得到

$$\varphi^i(t+c_0)=\varphi^i(t),$$

亦即我们看出, c_0 也是周期, 因此集合 F 是**闭的**.

由于在等式 (12) 中的数 c 不等于零 ($t_1\neq t_2$), 所以集合 F 中含有不等于零的数. 从对集合 F 建立的性质容易得出, 对于集合 F 只有两种可能: 1) 集合 F 就是全部实数的集合; 2) 集合 F 中有最小正数 T, 且因此 F 就是由数 T 的所有整数倍的数所组成. 我们来证明, 确实只有这样两种可能性. 因为集合 F 含有数 c 的同时, 也含有 $-c$, 又在 F 中含有不为零的数, 所以在 F 中有正数.

假设在集合 F 中没有最小的正数, 亦即对于任意的正数 ε 都存在正周期 $c<\varepsilon$. 从集合 F 已证明的性质得出 (因为 c 是周期), 所有的 mc 也是周期, 这里 m 是整数.

由于$c < \varepsilon$, 因此对于任给的实数c_0, 总可以选取这样的整数m使得$|c_0 - mc| < \varepsilon$. 这样一来, 任何实数c_0都是集合F的极限点, 从而由集合F的封闭性, 这个集合与全体实数的集合是完全一样的.

现在假设, F不是全体实数的集合. 那么根据上面的证明, 在F中存在最小正数T. 令c为任意周期, 于是可以选取这样的整数m, 使得$|c - mT| < T$. 假设$c \neq mT$, 则$|c - mT|$为不等于零的周期, 而这是不可能的, 因为$|c - mT| < T$, 与T是最小周期矛盾. 这样就证明了F中的每一个数c都可以写成形式$c = mT$, 其中m为整数.

现在已经容易验证, 如果F是全体实数的集合, 那么情形 1) 就成立, 而如果F不是全体实数的集合, 那么情形 2) 就成立. 于是命题 (C) 得证.

命题 (C) 可以简单地叙述为存在三种轨线: 一、平衡位置; 二、周期轨线 (环); 三、自己不相交的轨线. 自然应当认为, 最后一种情形是 "最普遍的".

从定理 2 推出, 经过方程组 (1) 定义域Δ中的每一点, 都有表示方程组解的轨线通过. 因此整个区域Δ充满了轨线, 而且按照 (B), 这些轨线两两互不相交. 在所有的轨线中, 特别分出自己相交的一类轨线, 它们或者是平衡位置, 或者是环. 这两种轨线有极重要的价值.

这就是自治方程组解的动力学解释. 方程组本身也还可以有几何解释.

相空间

(D) 既然自治方程组 (1) 定义在开集Δ上, 这就使得集合Δ的每一点 $(x_0^1, \cdots, x_0^n)$ 与n个数的一个序列, 即序列:

$$f^1(x_0^1, \cdots, x_0^n), \cdots, f^n(x_0^1, \cdots, x_0^n)$$

对应. 这些数可以看成是在n维空间中从点$(x^1_, \cdots, x_0^n)$所作出向量 $\boldsymbol{f}(x_0^1, \cdots, x_0^n)$ 的分量. 因此这就使得自治方程组与给定在开集Δ上的几何图像 —— **向量场**, 建立了对应. 在集合Δ的每一点$(x_0^1, \cdots, x_0^n)$处, 定义了一个从这点出发的向量$\boldsymbol{f}(x_0^1, \cdots, x_0^n)$. 在解的几何解释与方程组本身的几何解释之间有如下的联系: 令$(x_0^1, \cdots, x_0^n)$是集合Δ的任一点; 由方程组本身的几何解释, 这一点与从它出发的向量 $\boldsymbol{f}(x_0^1, \cdots, x_0^n)$ 建立了对应. 其次由定理 2, 存在方程组 (1) 满足初始条件

$$\varphi^i(t_0) = x_0^i, \quad i = 1, \cdots, n$$

的解$x^i = \varphi^i(t)$. 根据动力学解释, 解$x^i = \varphi^i(t)$对应于空间中描写轨线点的运动, 而且在时刻$t = t_0$进行运动的点经过空间中的位置$(x_0^1, \cdots, x_0^n)$. 于是, 描写解$x^i = \varphi^i(t)$的点在它运行通过位置$(x_0^1, \cdots, x_0^n)$时刻的速度向量与向量$\boldsymbol{f}(x_0^1, \cdots, x_0^n)$重合. 方程组 (1) 当

$$x^i = x_0^i, i = 1, \cdots, n; \quad t = t_0$$

时也表现出这种重合. 把自治方程组 (1) 的解解释为轨线的形式, 以及把自治方程组 (1) 本身解释为向量场的形式, 它们所在的 n 维空间称为方程组 (1) 的**相空间**, 轨线称为**相轨线**, 向量 $\boldsymbol{f}(x_0^1,\cdots,x_0^n)$ 称为**相速度**. 两种解释之间的联系在于: 在每一时刻点沿轨线的运动速度与给定在该时刻动点所处空间位置的相速度一样.

我们现在从相速度的观点来研究平衡位置.

(E) 为了使得集合 Δ 中的点 $(a^1,\cdots,a^n)$ 是方程组 (1) 的平衡位置, 亦即为了方程组有满足

$$\varphi^i(t)\equiv a^i,\quad i=1,\cdots,n \tag{13}$$

的解 $x^i=\varphi^i(t)$, 必要且充分的条件是在点 $(a^1,\cdots,a^n)$ 处的相速度 $\boldsymbol{f}(a^1,\cdots,a^n)$ 等于零. 因此为了求出方程组 (1) 所有的平衡状态, 需要求解方程组

$$f^i(a^1,\cdots,a^n)=0,\quad i=1,\cdots,n.$$

这个方程组不是微分方程组, 而是通常所说的**有限**方程组 (在其中不出现导数).

为了证明命题 (E), 我们假设 $(a^1,\cdots,a^n)$ 是平衡状态, 即存在满足关系式 (13) 的解 $x^i=\varphi^i(t)$; 我们把这个解代入方程组 (1), 由于常数的导数等于零, 所以代入后给出

$$f^i(a^1,\cdots,a^n)=\frac{d}{dt}\varphi^i(t)=\frac{d}{dt}a^i=0.$$

因此在点 $(a^1,\cdots,a^n)$ 处的相速度 $f(a^1,\cdots,a^n)$ 实际上等于零. 反之, 我们假设在点 $(a^1,\cdots,a^n)$ 处的相速度 $\boldsymbol{f}(a^1,\cdots,a^n)$ 为零, 亦即 $f^i(a^1,\cdots,a^n)=0$, $i=1,\cdots,n$, 我们来证明, 在这种情况下, 等式 (13) 确定了方程组 (1) 的解. 代入后给出

$$\dot{\varphi}^i(t)=f^i(a^1,\cdots,a^n),\quad i=1,\cdots,n;$$

这些等式是成立的, 因为左边是常数的导数, 而右边是零.

(F) 对于在 §3 中给出的非自治方程组 (1), 其解 (2) 的几何解释就是把这个解与在变量 $t,x^1,\cdots,x^n$ 的 $(n+1)$ 维空间 R 中用方程组 (2) 确定的曲线 K 相对应, 这里 t 是空间 R 中的坐标之一. 转移到在变量 $x^1,\cdots,x^n$ 的 n 维相空间 S 中的几何解释在于我们不再认为量 t 是点的坐标, 而认为它是一个参数, 因此, 从积分曲线 K 得到相轨线 L 是由于将空间 R 沿 t 方向朝空间 S **射影**的结果.

当 $n=2$ 时, 这个投影具有几何上的直观性. 这时, 空间 R 是三维的, 而空间 S 是平面 (参看例题 4).

例题

1. 我们研究一阶自治微分方程式

$$\dot{x}=f(x), \tag{14}$$

当变量 x 在整条直线 P 上变动时，它的右边连续且有连续导数. 我们还补充假设函数 $f(x)$ 的零点，或者同样地，方程 (14) 的平衡位置没有极限点. 在这样的假设之下，平衡位置把直线 P 分成区间组 Σ，组 Σ 中的每一个区间 (a,b) 都有这样的性质，函数 $f(x)$ 在它的内部不等于零，而它的每一个端点 a 或者 b，或是函数 $f(x)$ 的零点，或是等于 $\pm\infty$. 因此，组 Σ 或者是由有限个或是可列个有限区间以及不多于两个的半无限区间所组成，或者是只含一个两端无限的区间 $(-\infty, +\infty)$. 设 (a,b) 是组 Σ 的某一个区间，x_0 是这区间内的点，$x=\varphi(t)$，$r_1<t<r_2$，是方程 (14) 初始值为 $0, x_0$ 的不可延拓解. 为了确定起见，令 $f(x_0)>0$；那么可以证明，

$$a<\varphi(t)<b, \quad 当 \quad r_1<t<r_2, \tag{15}$$

$$\lim_{t\to r_1}\varphi(t)=a, \quad \lim_{t\to r_2}\varphi(t)=b. \tag{16}$$

此外，如果数 a，或是相应地数 b，是有限的，那么数 r_1，或是相应地数 r_2，是无穷大. 于是 (图 17)，每一个区间 (a,b) 都是方程 (14) 单独的一条相轨线.

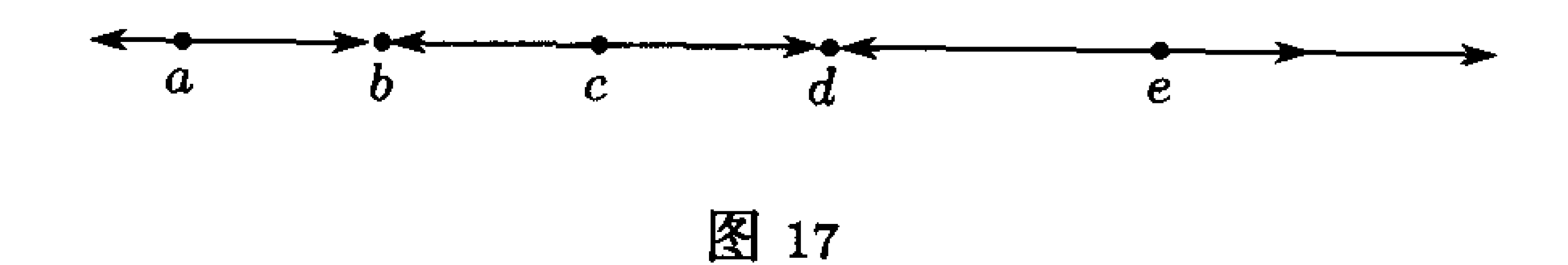


图 17

我们来证明关系式 (15) 和 (16). 从假设 $f(x_0)>0$ 得出，在区间 (a,b) 上函数 $f(x)$ 是正的，从而描写相轨线的这个区间的每一个点，都是从左向右运动. 于是当 t 增大时，点 $\varphi(t)$ 只有越过区间 (a,b) 的右端点 b，才有可能离开区间 (a,b). 假设这发生在某个时刻 $t=t_1$，那么当 $t=t_1$ 时有 $\varphi(t_1)=b$，这就意味着两条不同的轨线 $x=\varphi(t)$ 和 $x=b$ 相交，这是不可能的. 完全一样地证明，当 t 减小时，点 $\varphi(t)$ 不可能离开区间 (a,b). 因此关系式 (15) 得到证明.

现在假设，$\lim\limits_{t\to r_2}\varphi(t)=c<b$，并令 $\psi(t)$ 是方程 (14) 有初始值 $0, c$ 的解. 由于 $f(c)>0$，所以对某个负值 t_2 有 $\psi(t_2)<c$，而这就意味着两条不同的轨线 $\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$ 相交. 这是不可能的. 于是证明了 $\lim\limits_{t\to r_2}\varphi(t)=b$. 关系式 $\lim\limits_{t\to r_1}\varphi(t)=a$ 也完全一样地证明.

最后，我们假设 $b<+\infty$，而来证明 $r_2=+\infty$. 假设与此相反，亦即 $r_2<+\infty$，那么我们定义函数 $\chi(t)$，使得当 $r_1<t<r_2$ 时，$\chi(t)=\varphi(t)$；而当 $t\geqslant r_2$ 时，$\chi(t)=b$. 显然，函数 $\chi(t)$ 连续且满足方程 (14)，但这是不可能的，因为这时两条不同的轨线 $x=\chi(t)$ 和 $x=b$ 就相交了. 得到的矛盾证明了 $r_2=+\infty$. 完全一样地证明当 $a>-\infty$ 时有 $r_1=-\infty$.

令 b 是方程 (14) 的任一个平衡位置，而 (a,b) 和 (b,c) 是 Σ 中与它相邻接 (分别在左边和右边) 的两个区间. $(a,b),(b,c)$ 中的每一个区间都是一条轨线. 如果当 t 增大时，分别描写轨线 (a,b) 和 (b,c) 的两个点都**趋近于**平衡位置 b，那么平衡位置 b 就

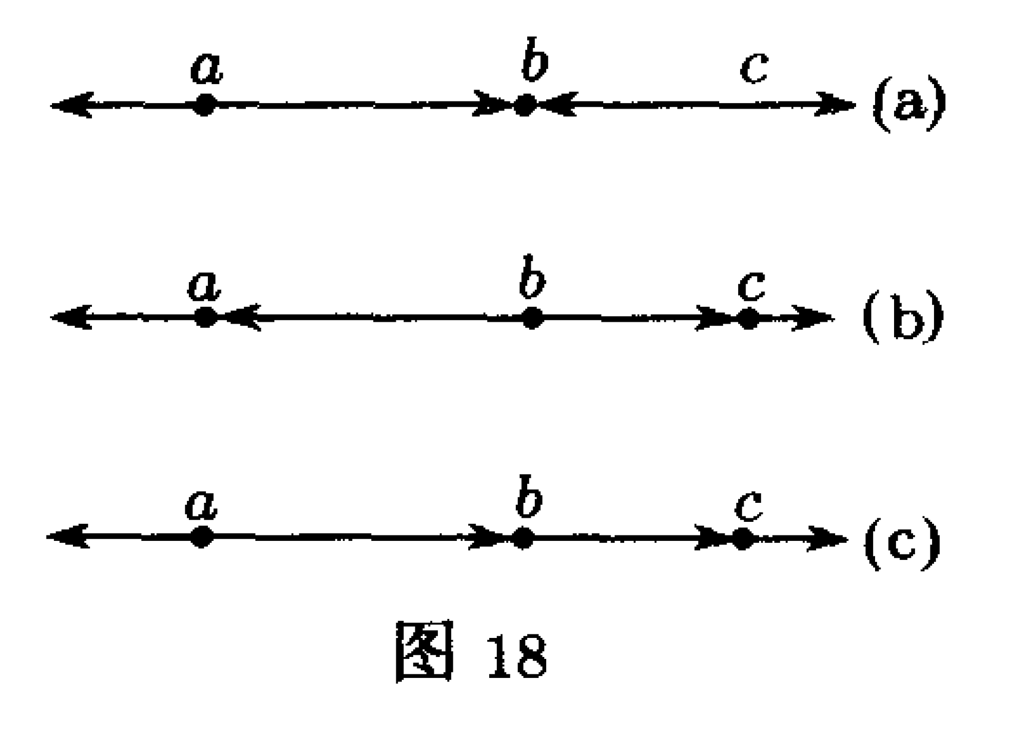


图 18

称为**稳定的**(图 18(a)). 如果分别描写轨线 (a,b) 和 (b,c) 的两个点都**离开**点 b, 那么就称平衡位置 b 为**不稳定的**(图 18(b)). 如果沿着一条轨线的点趋近于点 b, 而沿着另一条轨线的点却离开, 那么平衡位置 b 就称为**半稳定的**(图 18(c)). 为了平衡位置 b 是稳定的, 必要且充分条件是使得函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上是正的, 而在区间 (b,c) 上是负的. 为了平衡位置 b 是不稳定的, 必要且充分条件是使得函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上是负的, 而在区间 (b,c) 上为是正的. 为了平衡位置 b 是半稳定的, 必要且充分条件是使得函数 $f(x)$ 在两个区间 (a,b) 和 (b,c) 上有同一个符号.

假设 $\dot{f}(b)\neq 0$; 那么在点 b 附近, 函数 $f(x)$ 的符号与量 $\dot{f}(b)(x-b)$ 的符号相同. 由此得出, 当 $\dot{f}(b)<0$ 时, 方程 (14) 的平衡位置 b 是稳定的, 而当 $\dot{f}(b)>0$ 时, 它是不稳定的.

2. 我们考察方程

$$\dot{x}=f(x), \tag{17}$$

其中 $f(x)$ 是周期函数, 且有连续的一阶偏导数. 为了确定起见, 我们假设它的周期等于 2π. 在例 1 中关于方程 (14) 所谈到的一切结果对方程 (17) 来说仍然是正确的, 因为方程 (17) 是方程 (14) 的特殊情形. 但是考虑到方程 (17) 的特殊性 (函数 $f(x)$ 的周期性), 不把方程 (17) 的相空间看成直线而把它看成是半径为 1 的**圆周** K 更为合适, 在圆周上选取某个计算起点 O 以及绕行方向 (例如, 逆时针方向). 将每一个数 x 与圆周 K 上的点 ξ 相对应, 点 ξ 是圆周 K 上从计算起点开始沿逆时针方向且弧长为 x 的弧线端点 (图 19). 这时所有的数 $x+2k\pi$ (k 为整数) 都对应于圆周上的同一个点 ξ. 由于 $f(x+2k\pi)=f(x)$, 因此可以令 $f(\xi)=f(x)$, 从而函数 f 就定义在圆周 K 上了. 现在方程 (17) 给出了点 ξ 沿圆周 K 的运动. 如果 $x(t)$ 是方程 (17) 的某个解, 那么与数 $x(t)$ 对应的点 $\xi(t)$ 就沿着圆周 K 运动. 如果 α 是圆周 K 上使得 $f(\alpha)=0$ 的点, 那么方程 (17) 就存在使得 $\xi(t)=\alpha$ 的解 $x(t)$, 而 α 就是方程 (17) 的平衡位置. 为了简单起见, 我们假设方程 (17) 在圆周 K 上的平衡位置没有极限点; 那么它的平衡位置只有有限多个或者连一个都没有 (图 20). 平衡位置将圆周分成有限的区间组 Σ. 如果连一个平衡位置都没有, 那么组 Σ 就只含一个 "区间"(圆周). 如果只有一个平衡位置 α, 那么组 Σ 也只含有一个区间, 它由圆周上除了点 α 之外的一切点构成. 在第一种情形, 区间根本没有端点; 在第二种情形, 它的两个端点相重合. 令 I 为组 Σ 的某个区间, $x(t)$ 是方程 (17) 以 $0,x_0$ 为初始值的解, 以及 ξ_0 为区间 I 中与 x_0 对应的点. 解 $x(t)$ 总是对所有的 t 值都有定义, 而点 $\xi(t)$ 属于区间 I. 如果区间 I 有 (一个或者两个) 端点, 那么点在区间 I 上沿确定的方向运动, 而且区间 I 上的每一点都由解 $\xi(t)$ 通过一次. 如果区间 I 就是整个圆周, 那么从位置 ξ_0 出发, 点经过某段时间 T 又回到原来的位置, 因此 $\xi(0)=\xi(T)$. 在这种情况下, $\xi(t)$ 周期地依赖于数 t, 其周期为 T. 方

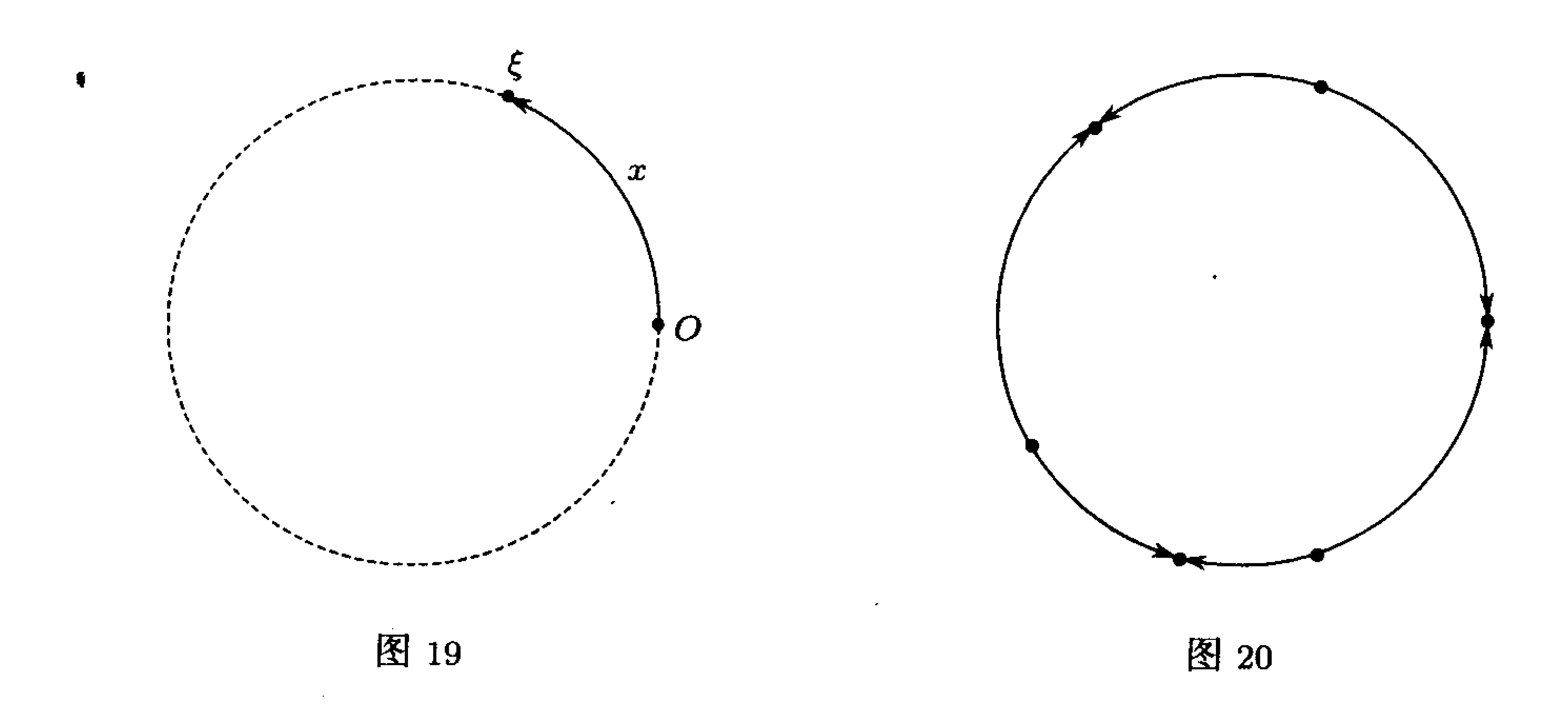


图 19　　图 20

程 (17) 与运动 $\xi(t)$ 相对应的数值解 $x(t)$ 满足条件

$$x(t+T)=x(t)\pm 2\pi\,.$$

从这个例子看出, 方程组的相空间并非总是要理解为欧几里得坐标空间, 而有时必须看成较复杂的几何图像. 在下面的例 3 中, 我们将遇到比这个例子更复杂的情况.

3． 我们考虑方程组

$$\dot{x}^i=f^i(x^1,x^2)\,,i=1,2\,, \tag{18}$$

其中函数 $f^i(x^1,x^2)$ 是关于两个变量以 2π 为周期的周期函数:

$$f^i(x^1+2k\pi,x^2+2l\pi)=f^i(x^1,x^2)\,,i=1,2\,.$$

与通常一样, 假设函数 $f^i(x^1,x^2)$ 连续, 且有一阶连续偏导数. 由于函数 $f^i(x^1,x^2)$ 的周期性, 认为方程组 (18) 的相空间不是平面, 而是更复杂的几何图像, 即**圆环面**或者通常所说的**环面**(图 21), 是合适的. 我们来描述这个曲面.

在以 x,y,z 为笛卡儿坐标的三维欧几里得空间中, 我们在 (x,z) 平面上选取以点 $(2,0,0)$ 为中心, 半径为 1 的圆周 K. 在这个圆周上取坐标为 $(3,0,0)$ 的点作为计算起点, 那么对于每个数 x^1, 以圆周 K 上的点 ξ^1 与它对应 (参看例 2). 现在我们于 (x,y,z) 空间中绕着 z 轴旋转 (x,z) 平面, 这时圆周 K 旋转后所描绘的曲面 P 就是一个环面. 令 ξ^1 为圆周 K 上的某一点. 由于旋转 (x,z) 平面一个用弧度计算的角度 x^2, 其结果是点 ξ^1 转移到环面 P 上的某一点 p (图 21). 如果进行旋转的不是角度 x^2 弧度, 而是角度 $x^2+2\pi$ 弧度, 那么我们也转移到环面 P 上的同一点 p. 因此环面 P 上的点 p 就由两个**循环坐标** ξ^1,ξ^2 唯一确定, 而且每一对循环坐标对应着环面上一个完全确定的点. 于是我们看到, 可以认为函数 $f^i(x^1,x^2)$ 不是给定在平面上而是在环面 P 上:

$$f^i(\xi^1,\xi^2)=f^i(x^1,x^2)\,.$$

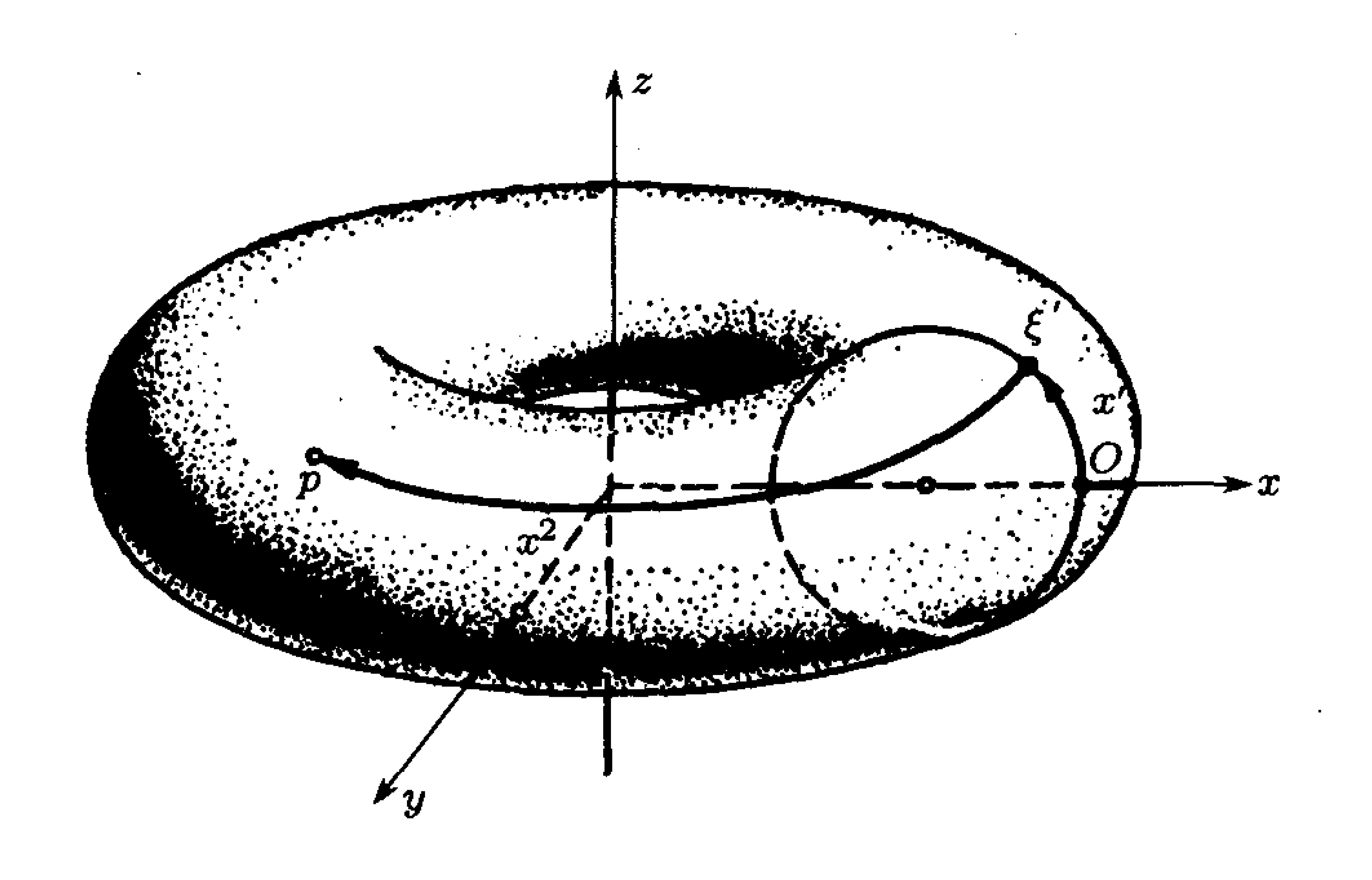


图 21

现在令 $x^1(t), x^2(t)$ 为方程组 (18) 的某一个解. 将每一组数 $x^1(t), x^2(t)$ 与循环坐标 $\xi^1(t), \xi^2(t)$ 建立对应之后, 我们就得到环面 P 上的点 $(\xi^1(t), \xi^2(t))$. 因此方程组 (18) 的每一个解 $x^1(t), x^2(t)$ 都可以用点沿环面的运动来表示, 而且在每一时刻的运动规律是由环面上的点 $(\xi^1(t), \xi^2(t))$ 来确定, 这一点就是轨线在该时刻所经过的点. 这就说明了函数 $f^i(\xi^1, \xi^2)$ 是如何定义在环面上. 于是整个环面 P 就由轨线所布满, 从而每两条轨线或者不相交或者重合. 特别, 如果轨线本身相交, 那么它或是闭轨线或是平衡位置.

不把方程组 (18) 的相轨线描绘在平面上而画在环面上, 反映了方程组 (18) 的特殊性 (函数 f^i 的周期性), 也便于对它进行研究.

4. 自治方程组

$$\dot{x} = -\omega y\,, \quad \dot{y} = \omega x$$

的每一个解都可写成形式:

$$x = r\cos(\omega t + \alpha)\,, \quad y = r\sin(\omega t + \alpha)\,, \tag{19}$$

其中 r 和 α 为常数. 在变量 t, x, y 的三维空间中, 当 $r \neq 0$ 时方程组 (19) 确定了一根螺旋线, 而当 $r = 0$ 时是一根直线 (即 t 轴).

在变量 x, y 的相平面 S 上, 当 $r \neq 0$ 时同一个方程组 (19) 确定了一个圆周, 而当 $r = 0$ 时是一个点 (平衡位置). 将空间 R 中的曲线转变成平面 S 上的曲线是用沿 t 轴方向的射影来实现的.

5. 非自治方程组

$$\dot{x} = 1\,, \quad \dot{y} = t$$

的每一个解都可写成形式:

$$x = t + a, \quad y = \frac{1}{2}t^2 + b, \tag{20}$$

其中a和b是常数. 从一般理论 (解的唯一性) 知道, 在变量t, x, y的三维空间R中由方程组 (20) 确定的两条曲线或者不相交或者重合. 为了得到在变量x, y平面S上用方程组 (20) 确定的射影曲线, 应当从方程组 (20) 消去t. 消去t之后我们得到:

$$y = \frac{1}{2}(x - a)^2 + b.$$

这个方程在xy平面上确定了一根顶点在(a, b)处、其轴沿着x正半轴方向的抛物线. 对于一根以点(a_1, b_1)为顶点, 而另一根以点(a_2, b_2)为顶点的两根抛物线, 只有在$a_1 = a_2, b_1 \neq b_2$的情况下才不相交. 如果$a_1 \neq a_2$, 那么对应的抛物线就会相交 (于一个点). 产生轨线相交是由于原方程组是非**自治的**. 所以在非自治方程组的情况下, 要在xy平面上描绘解是不适当的.

§16. 常系数线性齐次方程组的相平面

本节将在相平面上构造方程组

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = a^1_1 x^1 + a^1_2 x^2, \\ \dot{x}^2 = a^2_1 x^1 + a^2_2 x^2 \end{cases} \tag{1}$$

的相轨线, 或者也是用实常系数a^i_j方程的向量形式

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} \tag{2}$$

之下给出轨线. 这时我们必须分析一些不同的情况, 因为方程组轨线的相图本质上依赖于系数的值.

应当注意, 坐标原点$(0, 0)$总是方程组 (1) 的平衡位置. 这个平衡位置是唯一的, 当且仅当矩阵(a^i_j)的行列式不为零, 或者同样地, 这个矩阵的两个特征值都不为零.

我们假设矩阵A的两个特征值是实的、不相同的且不等于零. 于是从 § 14 的结果 (定理 10) 得出, 方程 (2) 的任意实解都可以写成形式:

$$\boldsymbol{x} = c^1 \boldsymbol{h}_1 e^{\lambda_1 t} + c^2 \boldsymbol{h}_2 e^{\lambda_2 t}. \tag{3}$$

这里$\boldsymbol{h}_1$和$\boldsymbol{h}_2$是矩阵A的实的线性无关特征向量; λ_1和λ_2是它的实特征值, 而c^1和c^2是任意实常数. 我们对基$(\boldsymbol{h}_1, \boldsymbol{h}_2)$展开解 (3), 并令

$$\boldsymbol{x} = \xi^1 \boldsymbol{h}_1 + \xi^2 \boldsymbol{h}_2; \tag{4}$$

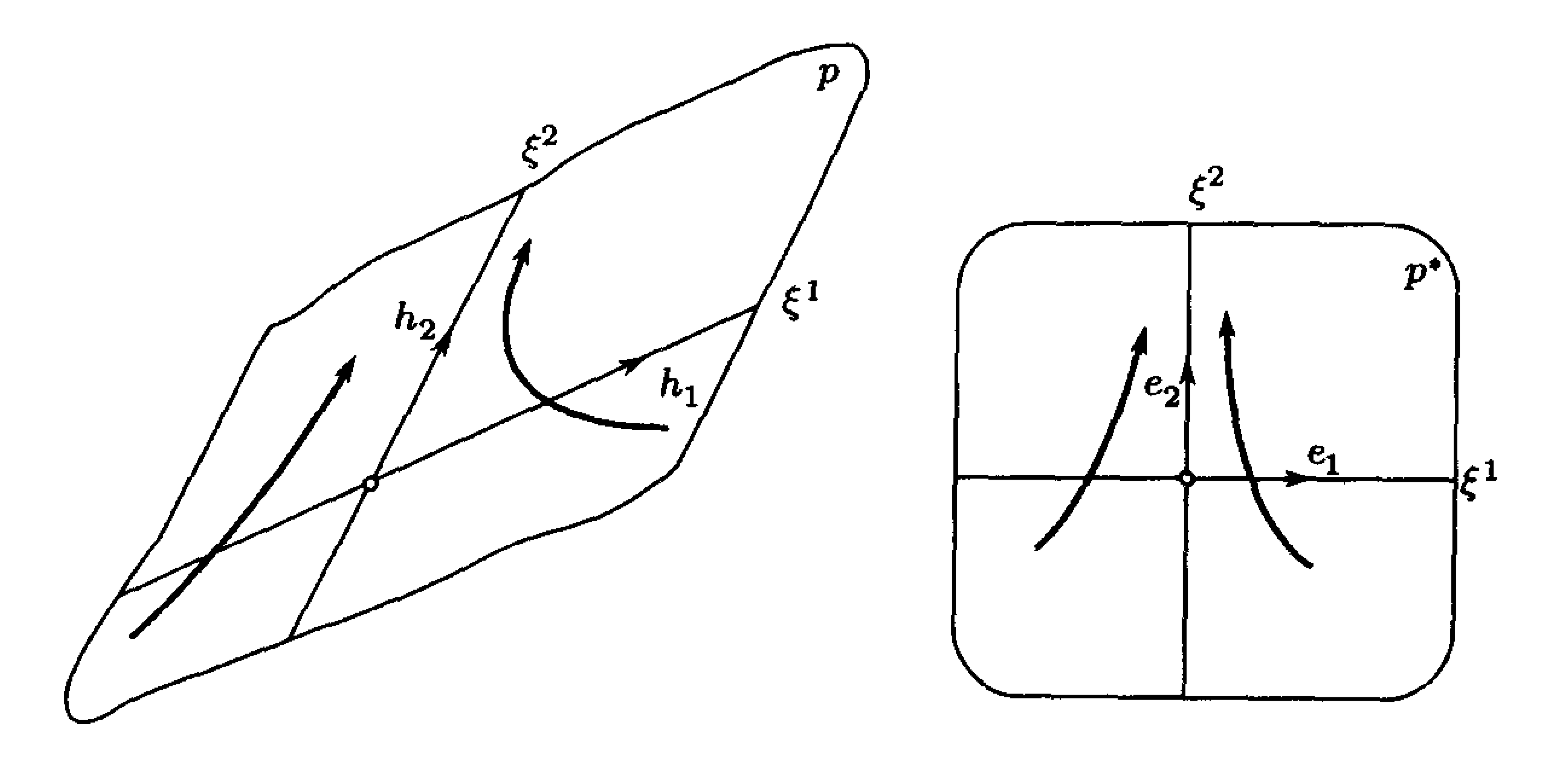


图 22

于是我们有

$$\xi^1 = c^1 e^{\lambda_1 t}, \quad \xi^2 = c^2 e^{\lambda_2 t}. \tag{5}$$

一般来说, 方程组 (1) 在相平面 P 上的坐标 ξ^1, ξ^2 并不是直角坐标, 因此我们要把相平面 P 用这样的方法仿射地映射到辅助平面 P^* 上, 使得在这个映射之下, 向量 $\boldsymbol{h}_1$ 和 $\boldsymbol{h}_2$ 变成平面 P^* 上互相正交且分别沿着横轴和纵轴的单位向量 (图 22). 平面 P 上的点 $\boldsymbol{x} = \xi^1 \boldsymbol{h}_1 + \xi^2 \boldsymbol{h}_2$ 在这个映射下变成平面 P^* 上笛卡儿直角坐标为 ξ^1, ξ^2 的点. 于是在平面 P 上由参数方程 (5) 给出的轨线, 就变成在平面 P^* 上的直角坐标下由同样方程给出的轨线 (我们也称它为**相轨线**). 我们先画出在平面 P^* 上由方程 (5) 给出的轨线, 然后再把它们映射回到平面 P 中.

在平面 P^* 上除了相轨线 (5) 之外, 还有由方程

$$\xi^1 = c^1 e^{\lambda_1 t}, \quad \xi^2 = c^2 e^{\lambda_2 t} \tag{6}$$

给出的轨线, 以及由方程

$$\xi^1 = -c^1 e^{\lambda_1 t}, \quad \xi^2 = c^2 e^{\lambda_2 t} \tag{7}$$

给出的轨线. 轨线 (6) 是由轨线 (5) 关于横轴作镜面反射得到, 而轨线 (7) 是由 (5) 关于纵轴的镜面反射得到. 因此上述的两种镜面反射保持平面 P^* 上轨线的图形不变. 由此看出, 如果已经画出第一象限的轨线, 那么不难作出在平面 P^* 上的整个相图.

我们注意到, 当 $c^1 = c^2 = 0$ 时就得到描写点在平衡位置 $(0,0)$ 的运动; 当 $c^2 = 0, c^1 > 0$ 时, 我们得到描写点在正半横轴上的运动; 当 $c^1 = 0, c^2 > 0$ 时, 我们得到描写点在正半纵轴上的运动. 如果 $\lambda_1 < 0$, 那么描写点在正半横轴上**朝向坐标原点**的方向进行运动; 如果 $\lambda_1 > 0$, 那么这个点的运动朝着相反的方向, 即**离开坐标原点**的方向进行运动. 在第一种情形, 点无限地接近于坐标原点运动; 在第二种情形, 点无

限地远离坐标原点而趋向于无穷远. 这对于描写点在正半纵轴上的运动也是同样正确的. 如果 c^1 和 c^2 都是正数, 那么在第一象限中进行运动的点就不会走出它的边界.

下面, 我们分别就几种与数 λ_1 和 λ_2 符号有关的情况, 对相平面进行更仔细地描述.

(A) **结点** 假设两个数 λ_1 和 λ_2 都不为零又有相同的符号, 而且

$$|\lambda_1| < |\lambda_2|. \tag{8}$$

我们首先研究

$$\lambda_1 < 0, \quad \lambda_2 < 0$$

的情形. 在这些假设下, 沿正半横轴的运动指向坐标原点, 沿正半纵轴的运动也完全一样. 其次, 在第一象限内部点沿任意轨线的运动都是渐近地趋向于原点, 而且这时轨线与横轴在原点相切. 当 t 趋于 $-\infty$ 时, 在轨线上运动点的横坐标和纵坐标都无限增大, 但是纵坐标的增长比横坐标增长快, 亦即运动偏向纵轴方向进行. 这种相图称为**稳定结点**(图 23(a)). 如果除了不等式 (8) 之外, 还满足不等式

$$\lambda_1 > 0, \quad \lambda_2 > 0,$$

那么轨线仍旧和前面一样, 但是沿着轨线的运动朝向相反的方向. 我们称这种相图为**不稳定结点**(图 23(b)).

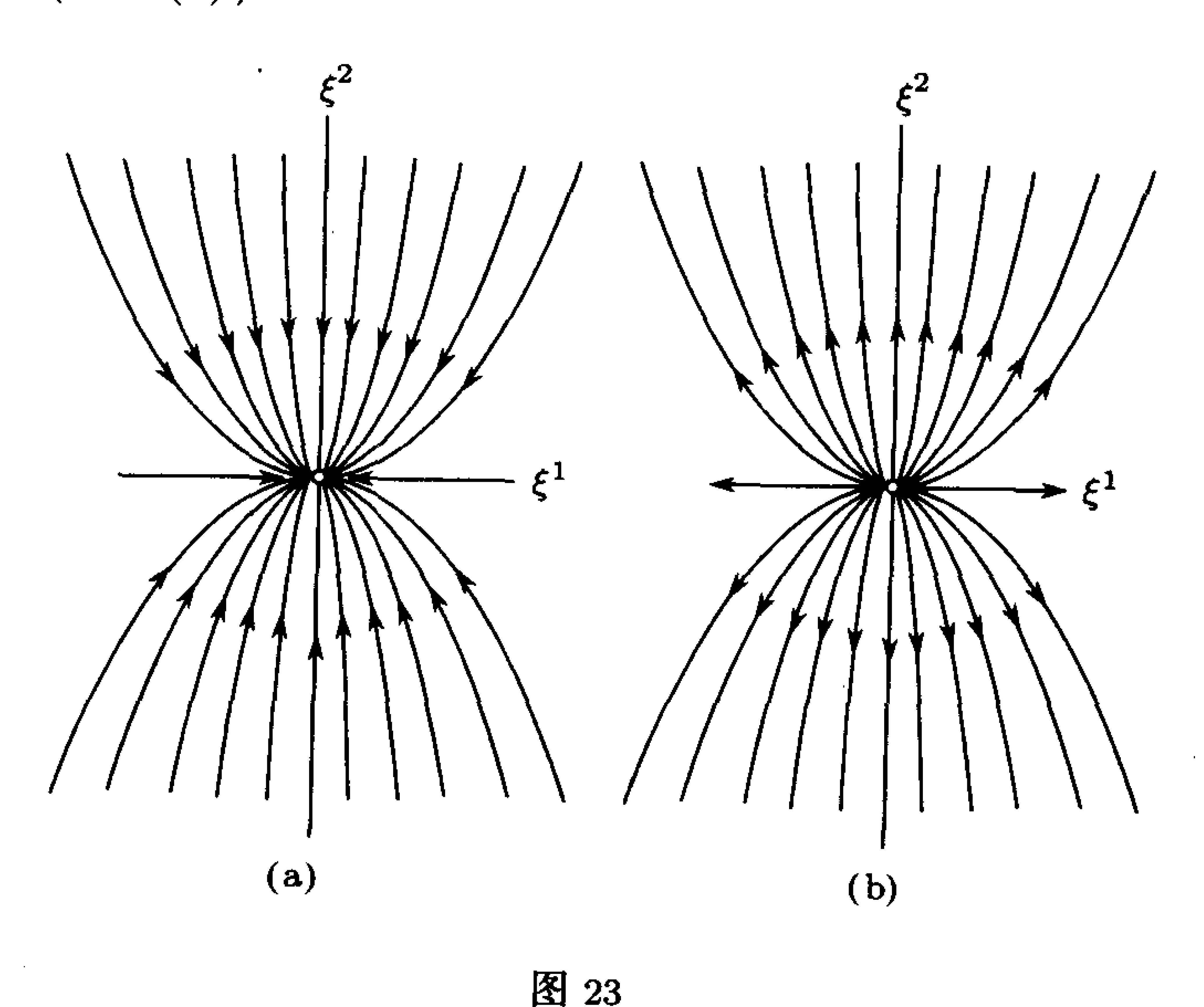


图 23

(B) **鞍点** 假设数 λ_1 和 λ_2 有相反的符号. 为了确定起见, 假设

$$\lambda_1 < 0 < \lambda_2.$$

在这种情况下, 沿正半横轴的运动走向坐标原点, 而沿正半纵轴的运动离开坐标原点. 位于第一象限内的轨线按其形状应理解为双曲线, 而沿着该轨线的运动顺着横轴方向指向原点, 顺着横轴方向离开原点. 这种相图称为**鞍点**(图 24).

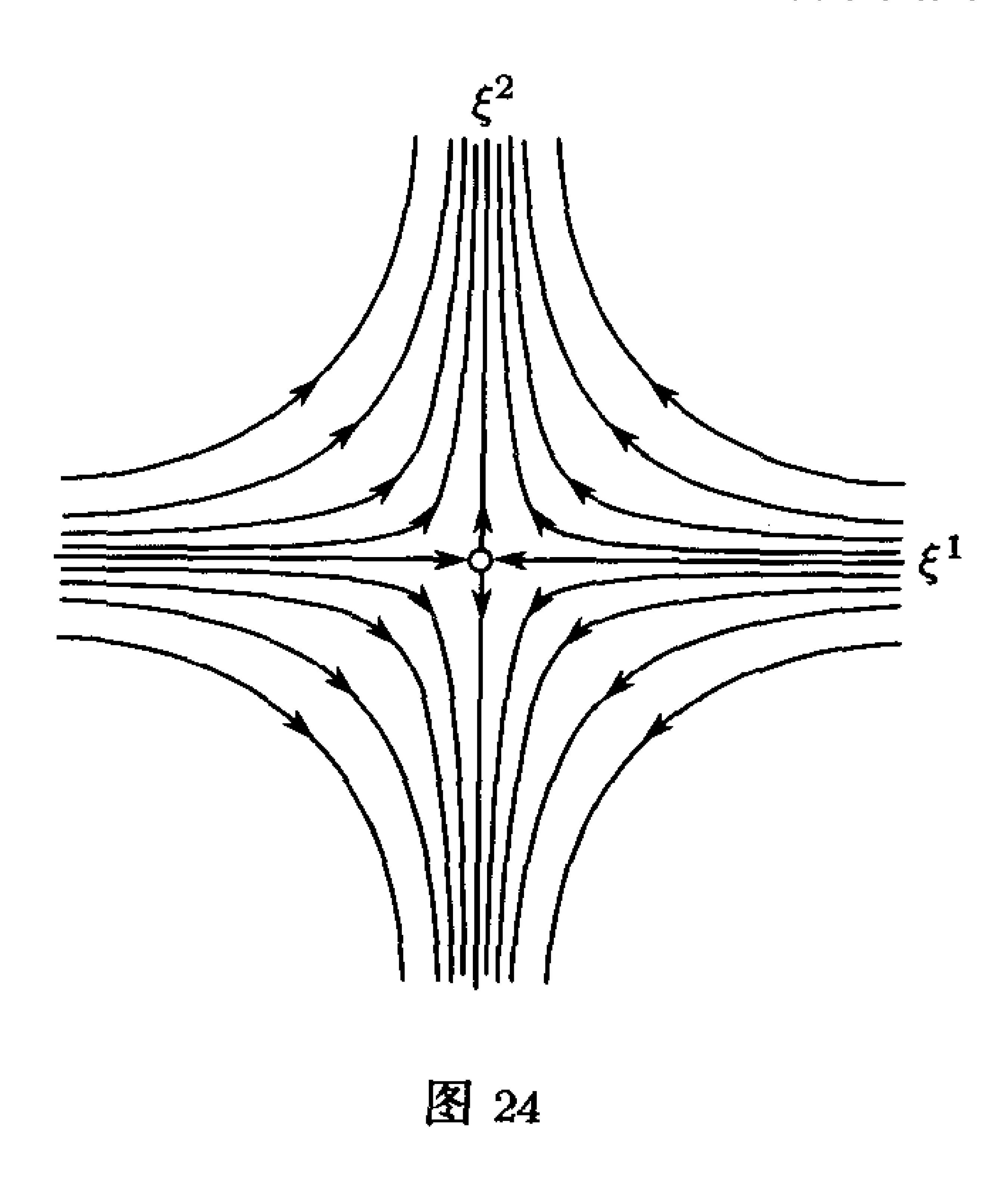


图 24

图 23(a),(b) 和图 24 给出在辅助平面 $P*$ 上轨线的图形. 在相平面 P 上轨线的分布可从这个图形经过仿射变换而得到, 且与特征向量的状态有关 (参看图 25 和 26).

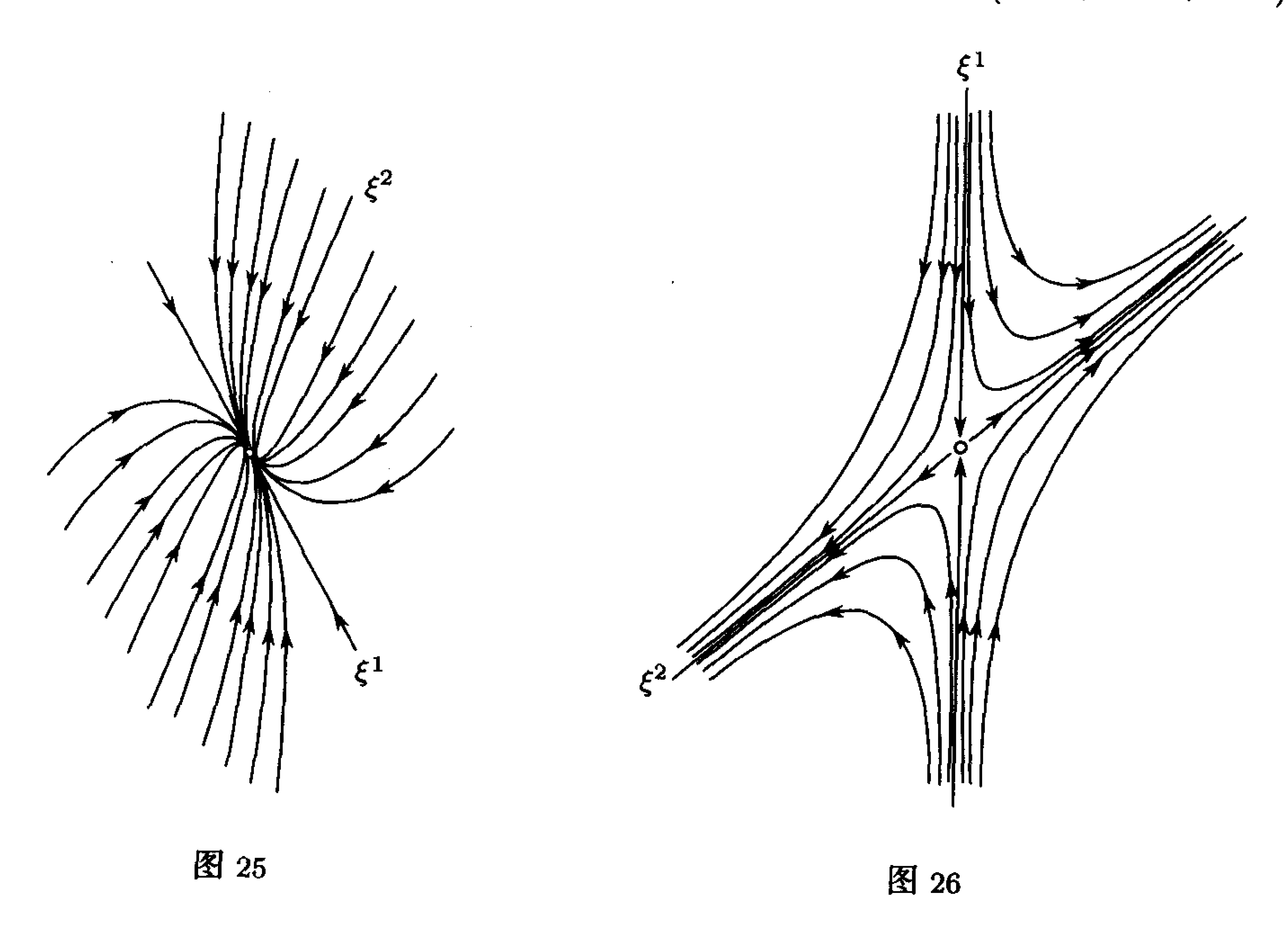


图 25　　图 26

现在我们研究当矩阵的特征值为复数的情形. 在这种情况下, 特征值是复共轭的, 即可以表示为 $\lambda = \mu + i\nu$ 和 $\overline{\lambda} = \mu - i\nu$, 而且 $\nu \neq 0$. 矩阵 A 的特征向量也能够取

成共轭的，因此可以将它们表示成$\boldsymbol{h}$和$\overline{\boldsymbol{h}}$. 令

$$\boldsymbol{h}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{h}_1-i\boldsymbol{h}_2),$$

这里$\boldsymbol{h}_1$和$\boldsymbol{h}_2$是实向量. 向量$\boldsymbol{h}_1$和$\boldsymbol{h}_2$是线性无关的，因为当它们之间是线性相关的情况下，我们就有在$\boldsymbol{h}$与$\overline{\boldsymbol{h}}$之间的线性相关性. 于是可以取向量$\boldsymbol{h}_1$和$\boldsymbol{h}_2$作为方程 (2) 在相平面$P$上的基.

方程 (2) 的任意实解可以写成形式:

$$\boldsymbol{x}=c\,\boldsymbol{h}\,e^{\lambda t}+\bar{c}\,\overline{\boldsymbol{h}}\,e^{\bar{\lambda}t}, \tag{9}$$

其中c为任意复常数. 设

$$\zeta=\xi^1+i\xi^2=c\,e^{\lambda t};$$

于是我们有:

$$\boldsymbol{x}=\xi^1\boldsymbol{h}_1+\xi^2\boldsymbol{h}_2.$$

我们把相平面P仿射地映射到变量ζ的辅助平面P^*上，使得向量$\boldsymbol{h}_1$的端点变到1，而向量$\boldsymbol{h}_2$的端点变到i；于是向量$\xi^1\boldsymbol{h}_1+\xi^2\boldsymbol{h}_2$就对应于复数$\zeta=\xi^1+i\xi^2$. 由于这个映射，相轨线 (9) 就变成在平面$P*$上由方程

$$\zeta=c\,e^{\lambda t} \tag{10}$$

所描写的相轨线.

(C) **焦点和中心** 我们将方程 (10) 重新写成极坐标的形式，为此令

$$\zeta=\rho\,e^{i\varphi},\quad c=R\,e^{i\alpha}.$$

于是我们得到:

$$\rho=R\,e^{\mu t},\quad \varphi=\nu t+\alpha;$$

这是点在平面P^*上的运动方程. 当$\mu\neq0$时，每条轨线都叫做**对数螺线**.

在平面P上对应的图像称为**焦点**. 如果$\mu<0$，那么当t增大时，点沿对数螺线渐近地趋于坐标原点. 这就是**稳定焦点**(图 27(a)). 如果$\mu>0$，那么点离开坐标原点而趋于无穷远，我们有**不稳定焦点**(图 27(b)). 如果数μ等于零，那么除了平衡位置 (0,0) 之外，每条相轨线都是闭的，我们就称这样的图像为**中心**(图 28).

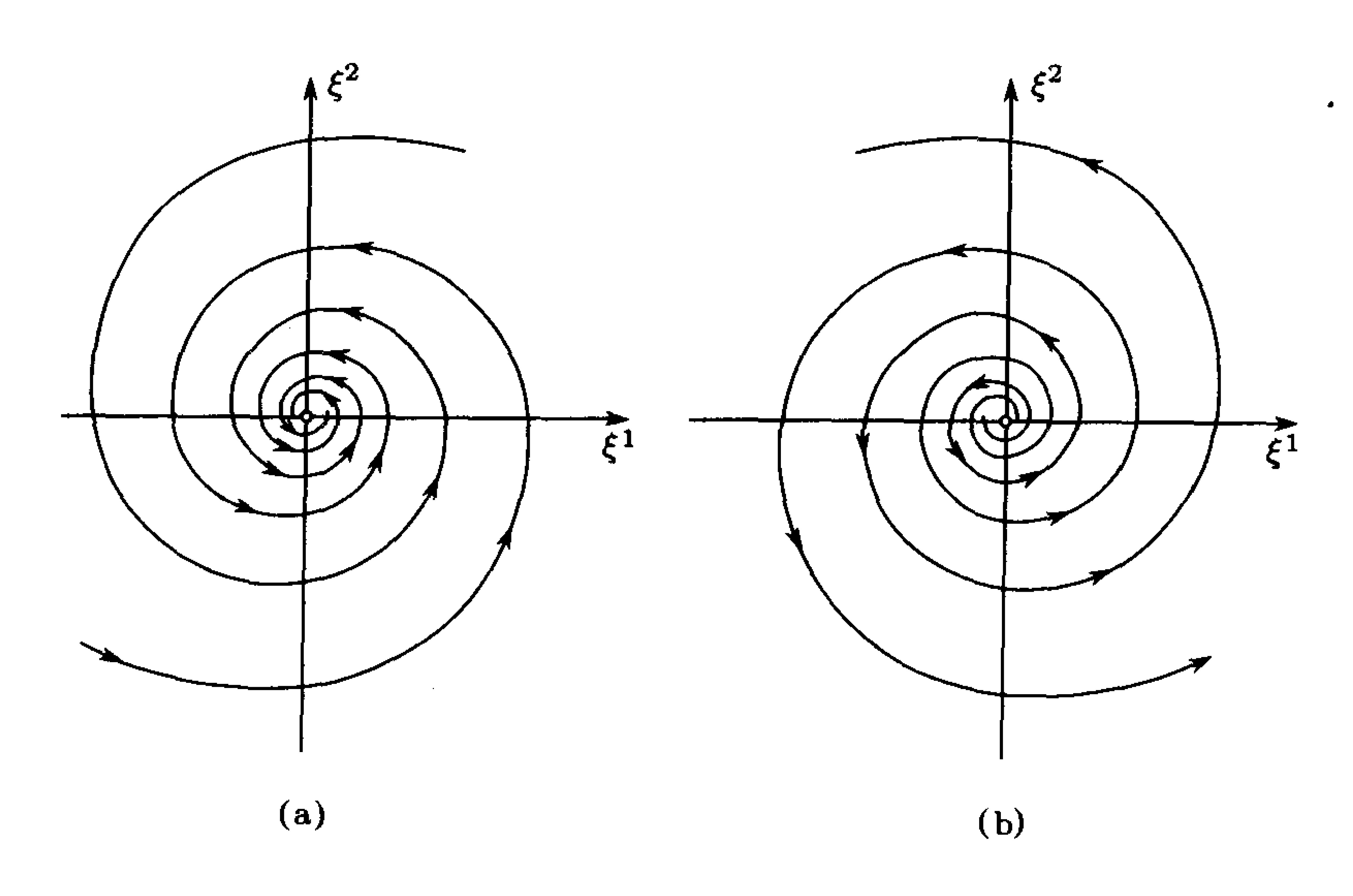


图 27

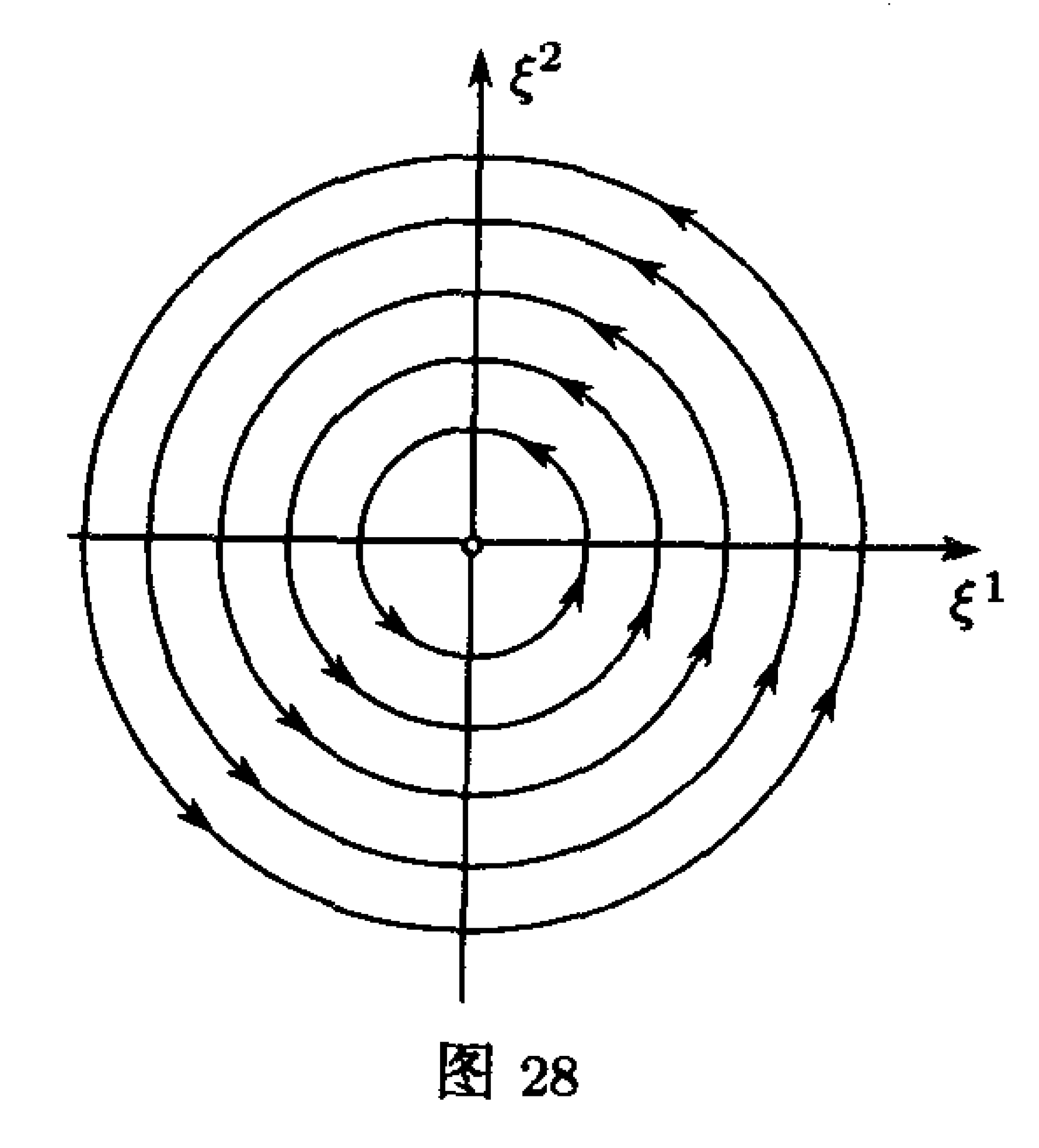


图 28

图 27 和 28 给出了在辅助相平面中的图形; 在平面 P 中图形仿射地变形了 (例如见图 29 和 30).

以上我们讨论了所谓的非退化情形: 根 λ_1 和 λ_2 不相等且都不等于零. 矩阵 (a^i_j) 元素的小变动并不改变这些命题中相轨线的一般性态. 但是中心结构的情形除外, 当矩阵 (a^i_j) 的元素有微小变动时, 等式 $\mu = 0$ 可能被破坏, 而中心变成稳定的或者不稳定的焦点. 其他的退化情况将在例题 1 和例题 3 中讨论.

例题

1.(**退化结点**) 如果方程组 (1) 的矩阵 A 只有一个特征值 λ, 那么可能有两种实质上不同的情形, 当对它们进行讨论时, 我们将以 $\boldsymbol{A}$ 来表示对应于矩阵 A 的线性变换.

情形 I. 在平面 P 上存在由变换 $\boldsymbol{A}$ 的两个特征向量组成的基 $\boldsymbol{h}_1, \boldsymbol{h}_2$:

$$\boldsymbol{A}h_1 = \lambda \boldsymbol{h}_1, \quad \boldsymbol{A}h_2 = \lambda \boldsymbol{h}_2. \tag{11}$$

情形 II. 在平面 P 上存在这样的基 $\boldsymbol{h}_1, \boldsymbol{h}_2$ 使得

$$\boldsymbol{A}h_1 = \lambda \boldsymbol{h}_1, \quad \boldsymbol{A}h_2 = \lambda \boldsymbol{h}_2 + \boldsymbol{h}_1. \tag{12}$$

由定理 30 直接得出形式为 (11),(12) 之一的基的存在性, 但是在此我们直接证明这个事实. 令 $\boldsymbol{h}_1$ 为变换 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量, 而 $\boldsymbol{h}_2$ 为任意一个不与 $\boldsymbol{h}_1$ 共线的向量. 于是我们

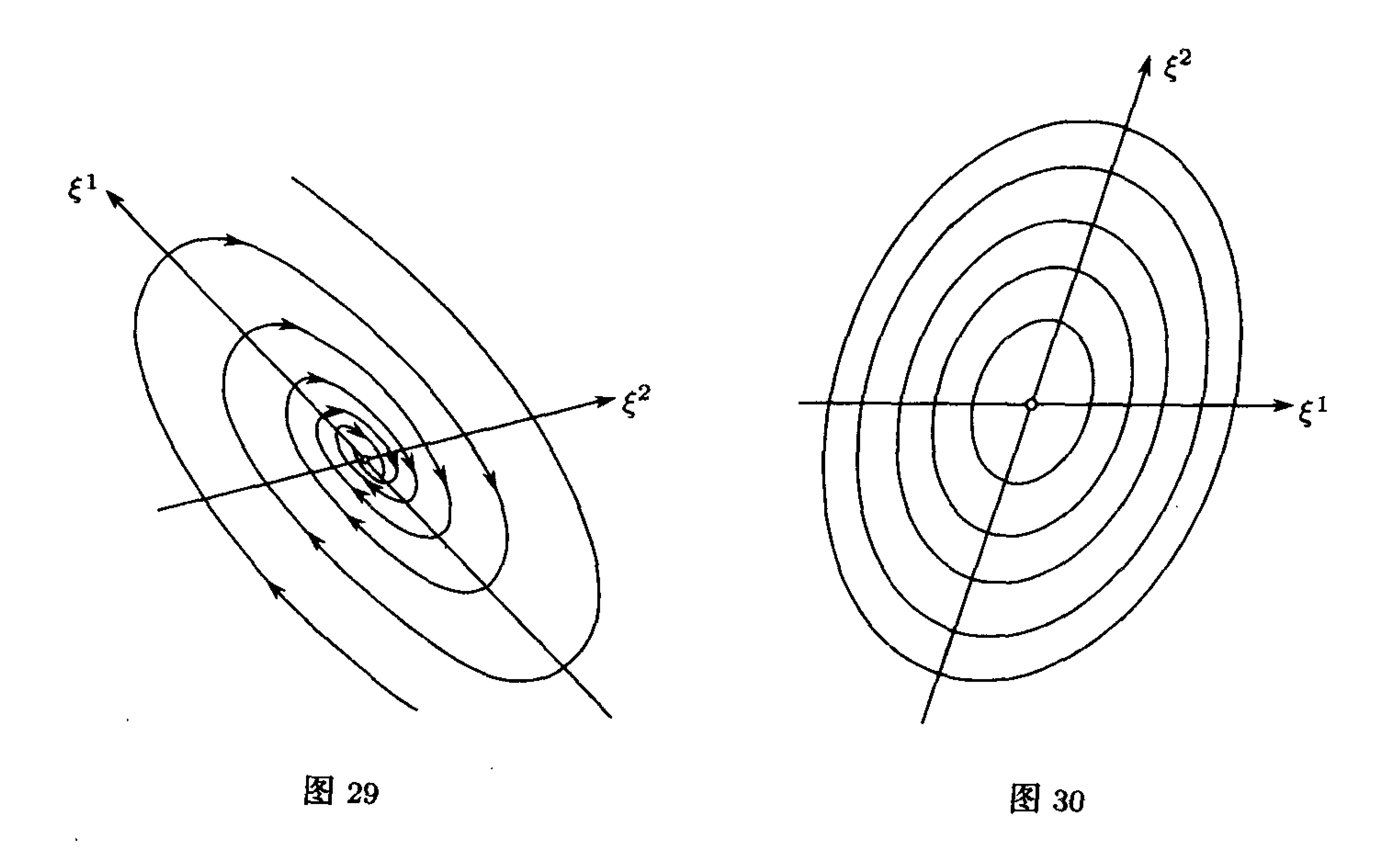


图 29 图 30

有:

$$Ah_1 = \lambda h_1\,, \quad Ah_2 = \alpha h_1 + \mu h_2\,.$$

由此看出, 在基 h_1, h_2 之下, 变换 A 有矩阵

$$\begin{bmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \mu \end{bmatrix}.$$

因而它的特征值为 λ 和 μ, 所以 $\lambda = \mu$. 如果 $\alpha = 0$, 那么对于基 h_1, h_2, 关系式 (11) 成立. 如果 $\alpha \neq 0$, 那么把向量 h_1 换成与它共线的向量 αh_1, 我们就得到满足条件 (12) 的基.

直接验证, 在情形 I 之下方程 (2) 的通解可写成形式:

$$x = c^1 h_1 e^{\lambda t} + c^2 h_2 e^{\lambda t} = x_0 e^{\lambda t}\,. \tag{13}$$

显然, 这个解有初始值 $(0, x_0)$. 当 $\lambda \neq 0$ 时, 每个解描绘出一根从坐标原点出发的半射线. 当 $\lambda < 0$ 时, 朝向坐标原点进行运动 (图 31(a)) ; 当 $\lambda > 0$ 时, 运动离开坐标原点 (图 31(b)) ; 关于 $\lambda = 0$ 的情形, 可参看例题 3.

对于情形 II 也能直接验证方程 (2) 的任意解有形式:

$$x = c^1 h_1 e^{\lambda t} + c^2 (h_1 t + h_2) e^{\lambda t}\,.$$

把这个解关于基 h_1, h_2 展开成形式 $x = \xi^1 h_1 + \xi^2 h_2$ 之后, 我们得到轨线在平面 P 上关于基 h_1, h_2 的方程:

$$\xi^1 = (c^1 + c^2 t) e^{\lambda t}\,, \quad \xi^2 = c^2 e^{\lambda t}\,. \tag{14}$$

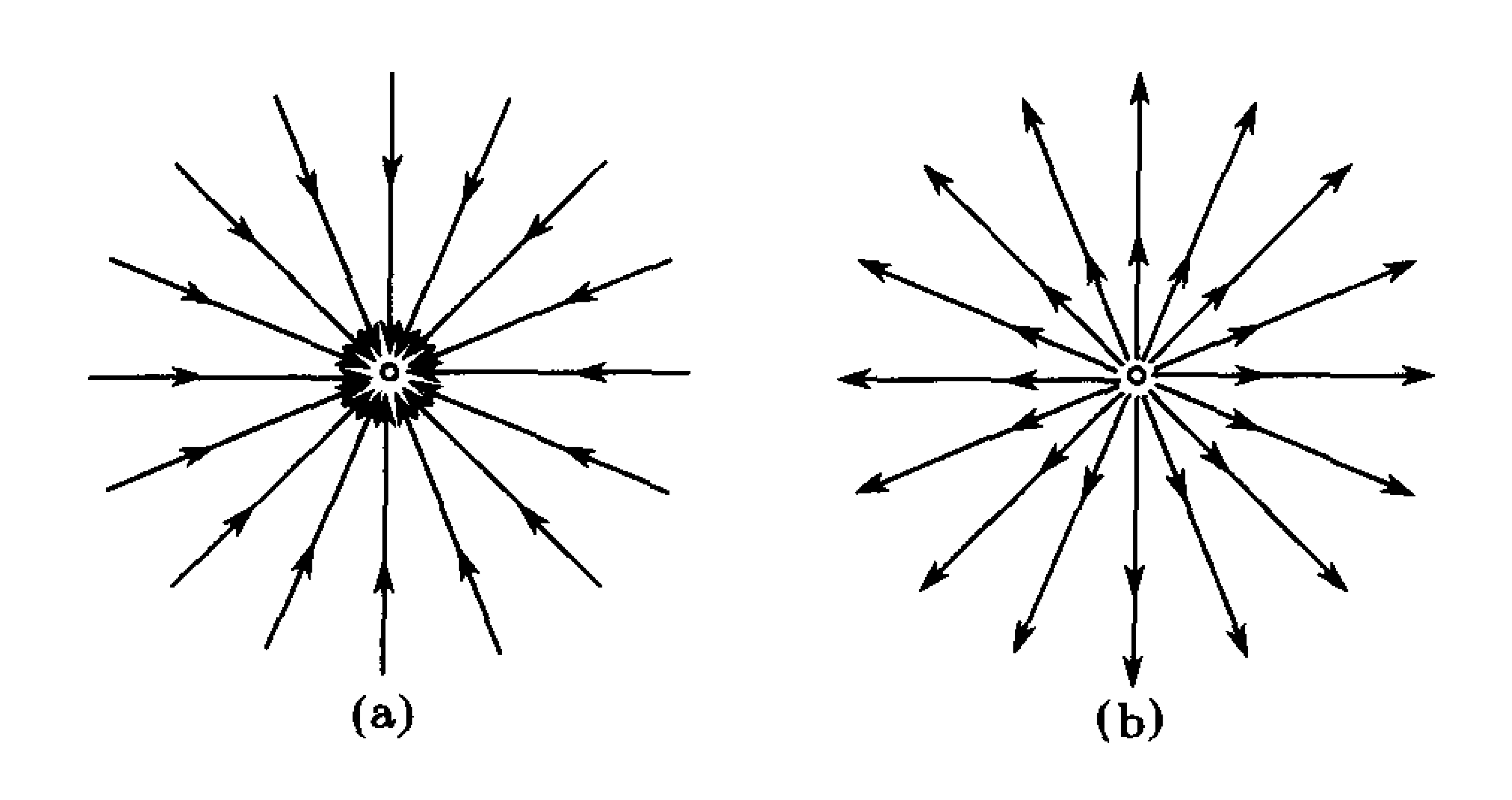


图 31

从相平面 P 变到相平面 P^* 的仿射映射, 把向量 $\boldsymbol{h}_1$ 和 $\boldsymbol{h}_2$ 变成平面 P^* 上沿坐标轴方向的互相正交单位向量, 把平面 P 的轨线变成平面 P^* 的轨线, 在平面 P^* 上方程 (14) 也给出在直角坐标下的轨线.

我们来分析 $\lambda \neq 0$ 的情形 ($\lambda = 0$ 的情形见例题 3). 在这种情况下, 我们考察充满平面 P^* 的轨线.

首先从方程 (14) 看出, 如果同时改变 c^1 和 c^2 的符号, 那么就得到了平面 P^* 关于坐标原点的对称变换, 它把轨线变成轨线; 因此只要考虑充满上半平面的轨线就够了. 当 $c^2 = 0, c^1 \neq 0$ 时, 我们得到两条轨线: 一条是当 $c^1 > 0$, 另一条是当 $c^1 < 0$. 第一条与正半横轴重合, 第二条与负半横轴重合; 沿着它们的运动都指向坐标原点. 其次考虑当 $c^1 = 0, c^2 > 0$ 时的轨线. 我们有:

$$\xi^1 = c^2 t\, e^{\lambda t}, \quad \xi^2 = c^2 e^{\lambda t}. \tag{15}$$

当 $t = 0$ 时, 我们得到在纵轴上的点 $(0, c^2)$. 当 t 从零增大时, 点开始向右运动, 然后向左, 但在所有时间都朝下垂向坐标原点, 并沿着与正横轴相切的轨线而接近于坐标原点. 当 t 从零减少到 $-\infty$ 时, 点向左运动, 同时向上升起, 但是向左快于向上, 因此它运动的一般趋势是朝着负横轴方向. 如果在方程 (15) 中让 c^2 取遍所有正值, 那么这样画出的轨线就充满了整个上半平面 (图 32(a)). 这时我们有**稳定的退化结点**. 如果 $\lambda > 0$, 那么轨线就由上述图形经过关于纵轴的镜面反射而得到 (图 32(b)), 但沿着它的运动却朝相反的方向进行, 亦即离开坐标原点. 这就是**不稳定的退化结点**. 在图 33(a),(b) 上表示出平面 P 中的相轨线.

2. 我们考虑常系数二阶线性齐次方程

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = 0. \tag{16}$$

按照 §4 中所说的方法, 用标准方程组代替这个方程之后, 我们得到:

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -bx - ay. \end{cases} \tag{17}$$

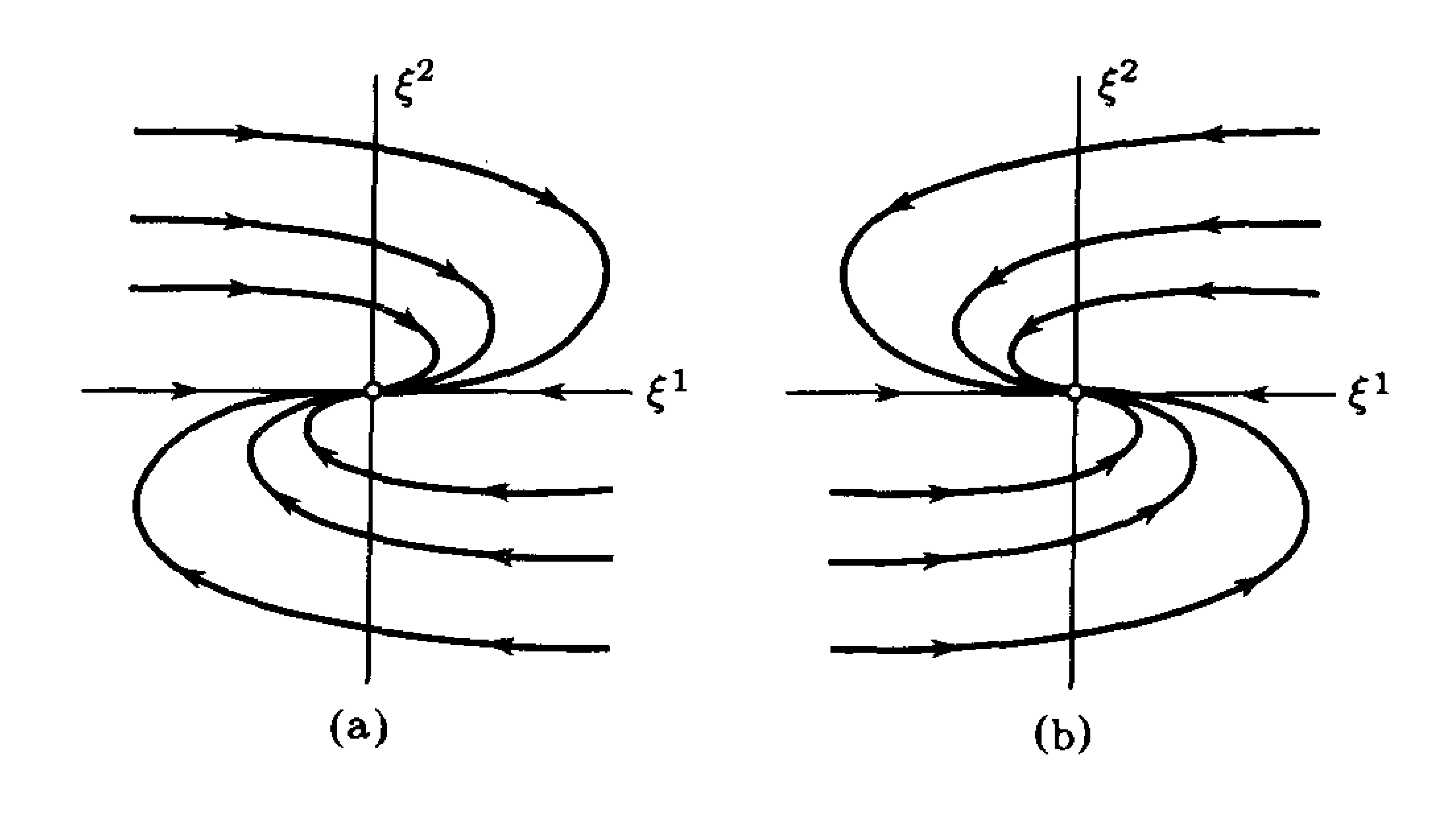


图 32

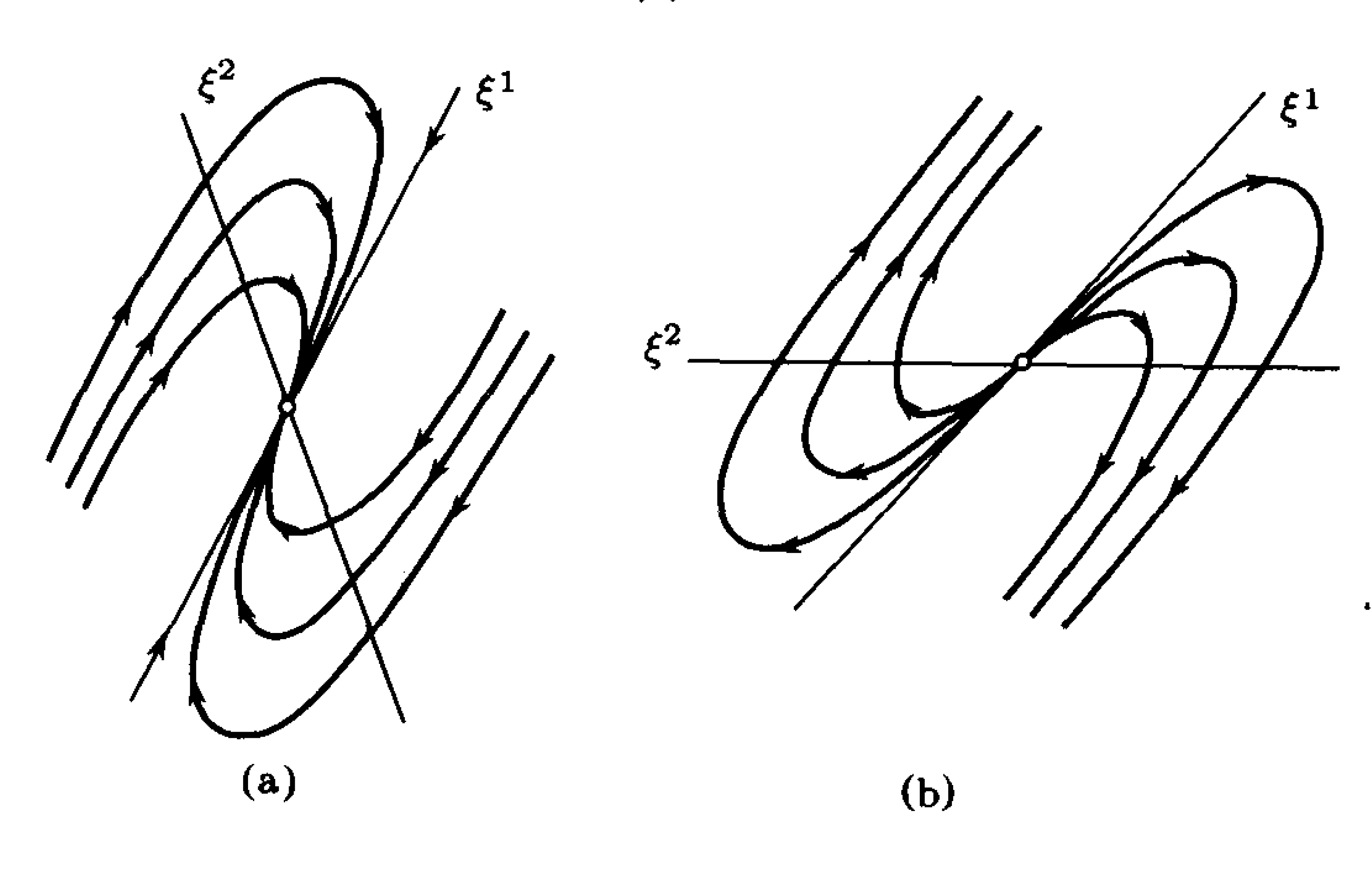


图 33

把方程组 (17) 的相平面看成方程 (16) 的相平面. 直接验证即知, 方程组 (17) 的特征多项式与方程 (16) 的特征多项式是一样的, 即等于

$$p^2 + ap + b. \tag{18}$$

于是如果多项式 (18) 的根是复数, 那么方程 (16) 的相平面就出现焦点或中心. 我们讨论当多项式 (18) 的根都不等于零、且为不相同实根时的相平面.

设 λ 是多项式 (18) 的根, 而 $\boldsymbol{h} = (h^1, h^2)$ 是与它相对应的特征向量. 于是我们有 (考虑到方程组 (17) 的形式) :

$$h^2 = \lambda h^1,$$

因此对应于特征值 λ 的特征方向由方程为

$$y = \lambda x$$

的直线确定; 我们称它为**特征直线**.

如果根 λ_1 和 λ_2 都是负的, 那么我们有**稳定结点**(见 (A)). 这时两条特征直线经过第二和第四象限, 在坐标原点附近的轨线切于位置靠近横轴的那条特征直线 (图 34). 如果根 λ_1 和 λ_2 都是正的, 那么我们就有**不稳定结点**(见 (A)). 两条特征直线经过第一和第三象限, 在坐标原点附近的轨线切于位置靠近横轴的那条特征直线 (图 35).

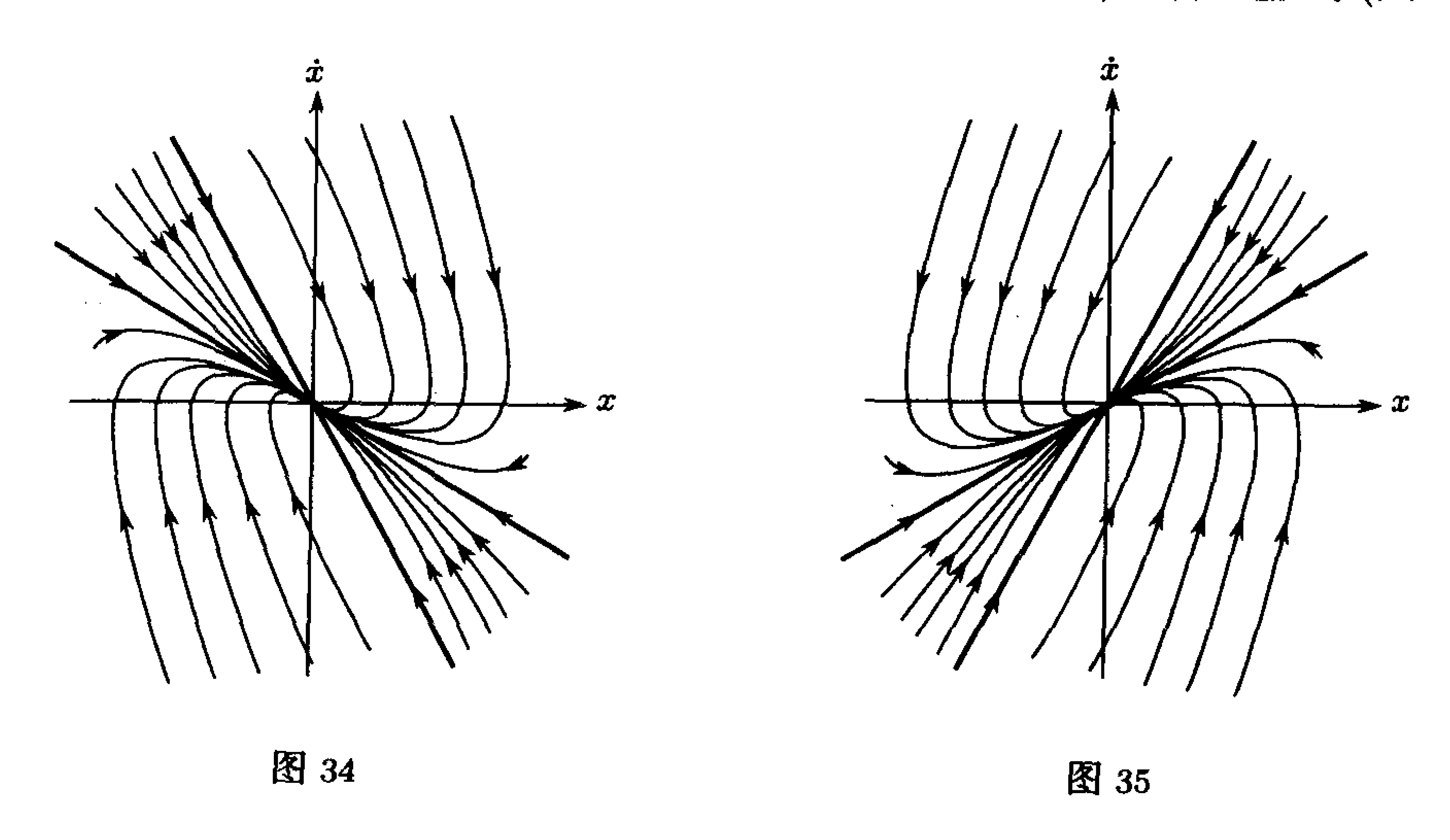


图 34　　图 35

如果根 λ_1 和 λ_2 有不同的符号, 那么我们就有**鞍点**; 一条特征直线经过第二和第四象限, 而另一条经过第一和第三象限. 轨线沿第一根直线的方向接近于坐标原点, 而沿第二根直线的方向离开坐标原点 (图 36).

3. 最后讨论矩阵 A 的特征值中至少有一个等于零的情形.

情形 I. 只有一个特征值等于零:

$$\lambda_1 \neq 0, \quad \lambda_2 = 0.$$

这时, 解可以写成形式 (4), 其中 ξ^1 和 ξ^2 由公式 (5) 给出. 因为 $\lambda_2 = 0$, 所以 $\xi^2 =$ 常数, 而沿着直线 $\xi^2 =$ 常数的运动是随着数 λ_1 符号的不同而朝向直线 $\xi^1 = 0$ 或者背

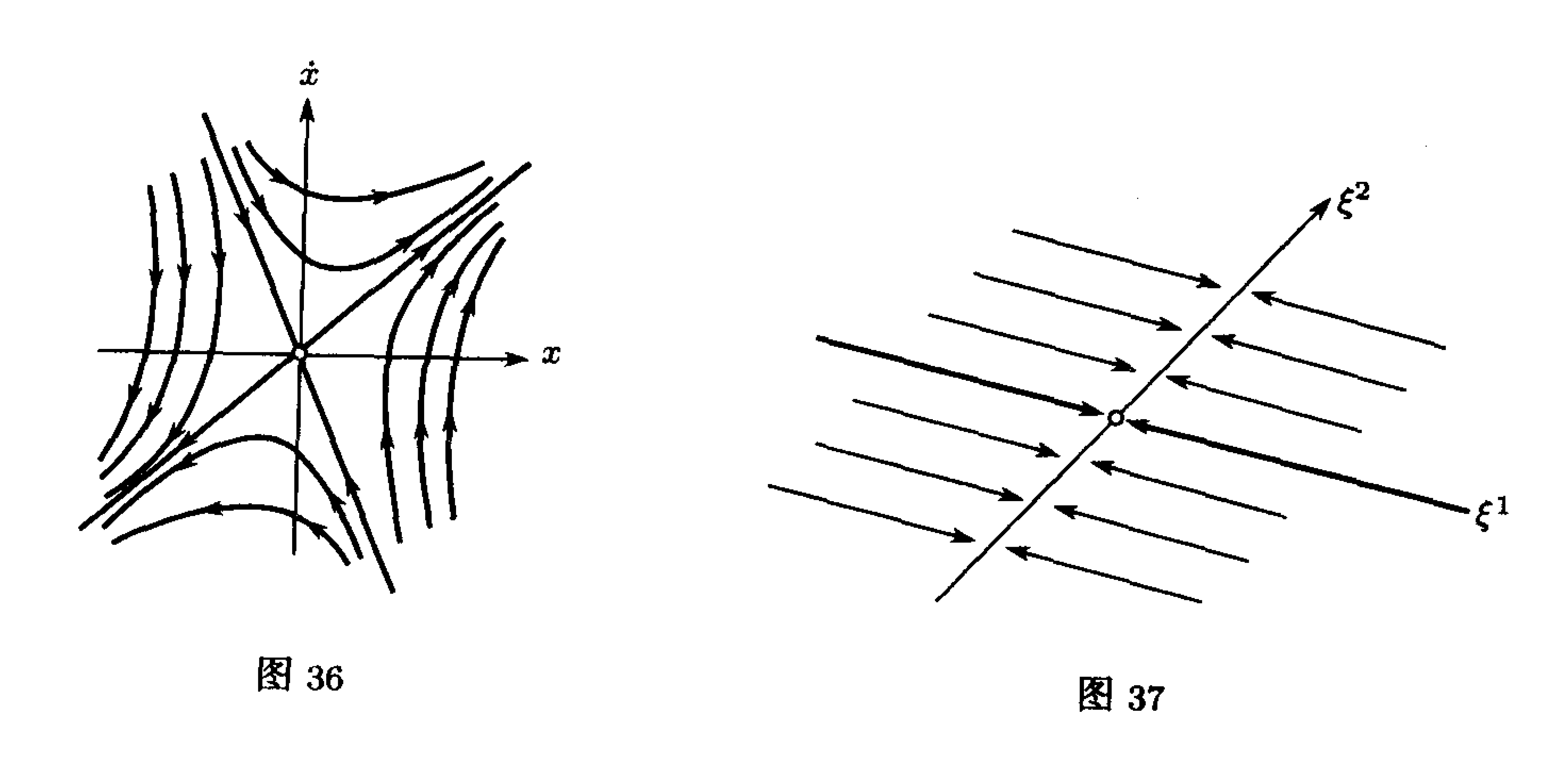


图 36　　图 37

离直线进行. 直线 $\xi^1=0$ 上所有的点都是平衡位置 (图 37).

情形 II. 如果只有唯一的特征值 $\lambda_1=\lambda_2=0$, 那么可能出现在例题 1 中考虑的两种情形.

情形 1. (见 (11), $\lambda=0$). 通解写成形式 (见 (13)):

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0.$$

这种情况只有在方程组 (1) 所有的系数都等于零时才发生; 这时平面 P 上的每一点都是平衡位置.

情形 2. (见 (12), $\lambda=0$). 通解写成形式 (见 (14)):

$$\xi^1=c^1+c^2t,\quad \xi^2=c^2.$$

沿着每一条直线 $\xi^2=$ 常数的运动都是匀速地进行. 直线 $\xi^2=0$ 上的每一点都是平衡位置 (图 38).

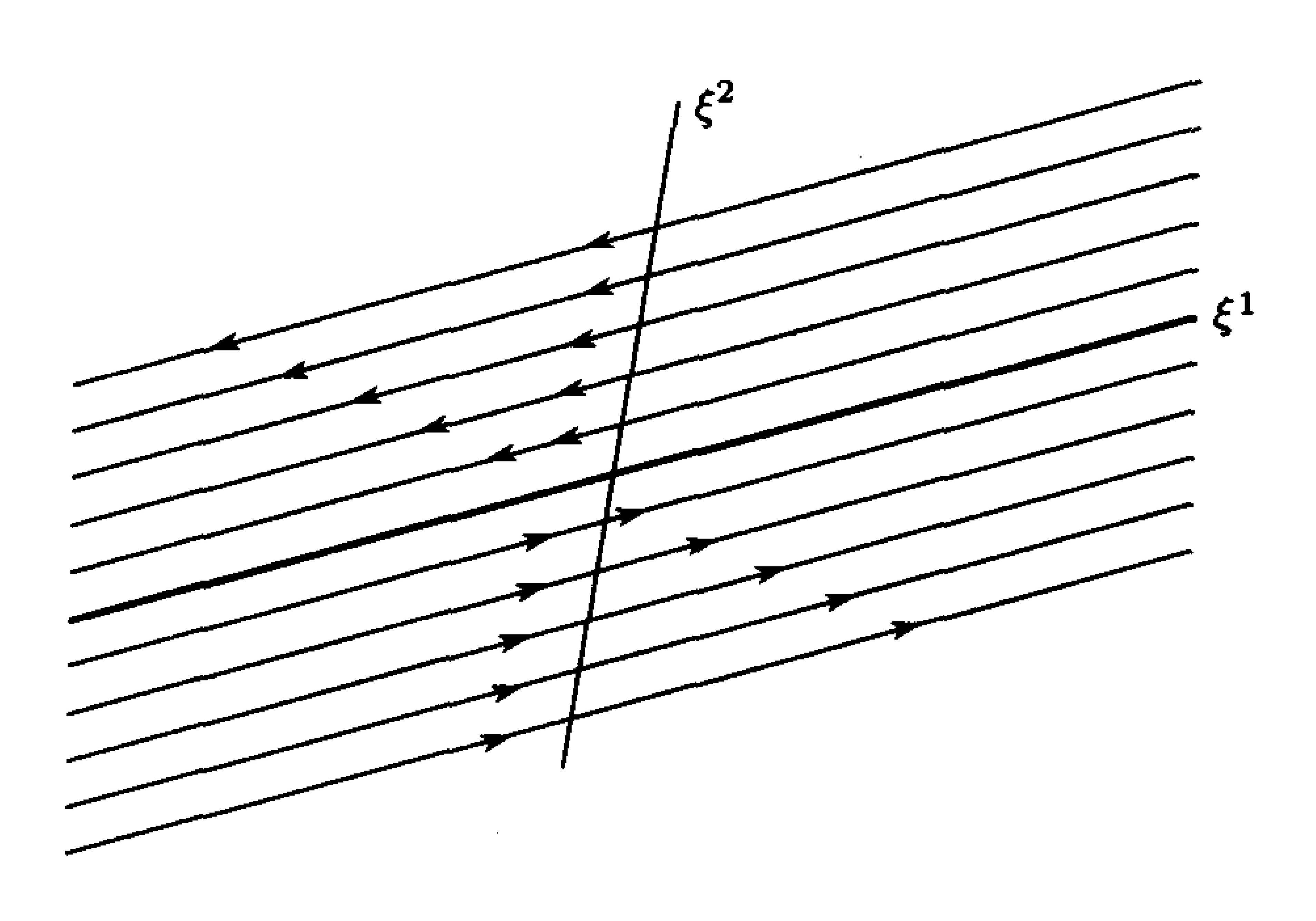


图 38

第三章 变系数线性方程

在这一章我们要讲述线性方程理论, 首先讲述 n 阶标准方程组, 然后是一个 n 阶方程式. 几乎所有关于一个方程式的结果, 都可以从标准方程组相应的结果推导出来. 本章的第三节专门用来讨论周期系数的标准齐次方程组. 这里的主要结果是关于经过变量的线性周期变换可能把周期系数标准方程组化成常系数标准方程组的李雅普诺夫定理. 后面, 这个结论在稳定性理论上有重要的应用. 它的证明很简单, 但是要依靠不是很初等的矩阵函数论. 这一理论并不属于常微分方程理论的范围, 但为了读者方便起见, 将在本书的附录II中讲述. 本章的第三节 (§19) 用到了矩阵分析, 因此并不是初等的.

§17. 标准线性方程组

这里将考察变系数的标准线性方程组

$$\dot{x}^i = \sum_{j=1}^{n} a_j^i(t)x^j + b^i(t), \quad i = 1, \cdots, n. \tag{1}$$

我们注意到, 如果 $q_1 < t < q_2$ 是方程组 (1) 的系数 $a_j^i(t)$ 和自由项 $b^i(t)$ 的存在和连续的区间, 那么根据定理 3, 方程组 (1) 的每个解都可以延拓到整个区间 $q_1 < t < q_2$ 上. 下面我们就认为所讨论的每一个解都给定在这个区间上, 并且所考虑的 t 值也属于它.

基本解组

首先讨论齐次方程组

$$\dot{x}^i = \sum_{j=1}^{n} a_j^i(t) x^j, \quad i = 1, \cdots, n, \tag{2}$$

或者在向量的记法下,

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A(t)\boldsymbol{x}. \tag{3}$$

(A) 我们来建立方程 (3) 的一些最简单性质:

1° 如果 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\varphi}(t)$ 是方程 (3) 的解, 它当某个值 t_0 时成为零:

$$\boldsymbol{\varphi}(t_0) = \mathbf{0}, \tag{4}$$

那么这个解恒等于零

$$\boldsymbol{\varphi}(t) \equiv \mathbf{0}, \quad q_1 < t < q_2.$$

2° 如果向量函数

$$\boldsymbol{\varphi}_1(t),\ \boldsymbol{\varphi}_2(t),\ \cdots,\ \boldsymbol{\varphi}_r(t)$$

都是方程 (3) 的解, 那么向量函数

$$\boldsymbol{\varphi}(t) = c^1 \boldsymbol{\varphi}_1(t) + \cdots + c^r \boldsymbol{\varphi}_r(t)$$

也是方程 (3) 的解, 其中 $c^1, \cdots, c^r$ 是任意常数.

性质 2° 可以直接验证. 性质 1° 从下面的事实推出: 恒等于零的向量 $\boldsymbol{x} \equiv \mathbf{0}$ 显然是方程 (3) 的解, 因此在 1° 中给定的解 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ 和这个解有共同的初始条件 (4), 从而应当与它完全一样.

(B) 设

$$\boldsymbol{\varphi}_1(t),\ \boldsymbol{\varphi}_2(t),\ \cdots, \boldsymbol{\varphi}_r(t) \tag{5}$$

是方程 (3) 的一组解. 如果存在不同时为零的常数 $c^1, \cdots, c^r$ 使得

$$c^1 \boldsymbol{\varphi}_1(t) + \cdots + c^r \boldsymbol{\varphi}_r(t) \equiv 0,$$

那么就称这组解是**线性相关**的. 在相反的情况下, 方程 (3) 的解组 (5) 就称为**线性无关**的. 于是, 只要对一个 $t = t_0$ 的值, 向量

$$\boldsymbol{\varphi}_1(t_0),\ \boldsymbol{\varphi}_2(t_0),\ \cdots, \boldsymbol{\varphi}_r(t_0) \tag{6}$$

是线性相关的, 那么解组 (5) 就线性相关. 换句话说, 如果解组 (5) 线性无关, 那么向量组 (5) 不论对哪个 t 值都不可能会线性相关.

我们来证明这件事. 假设向量组 (6) 是线性相关的, 也就是

$$c^1\varphi_1(t_0)+\cdots+c^r\varphi_r(t_0)\equiv 0\,,$$

其中常数 $c^1,\cdots,c^r$ 不全为零, 令

$$\varphi(t)=c^1\varphi_1(t)+\cdots+c^r\varphi_r(t)\,.$$

由命题 (A), 向量函数 $\varphi(t)$ 是方程 (3) 的解. 由同一命题 (A), 这个函数恒等于零, 因为它在点 $t=t_0$ 等于零.

现在我们转到对线性齐次方程组来讲是最重要的**基本解组**概念的定义.

(C) 对于方程 (3) 的一组解

$$\varphi_1(t),\ \varphi_2(t),\ \cdots,\varphi_n(t)\,, \tag{7}$$

(这里 n 是方程组 (2) 的阶数), 如果是线性无关的 (见 (B)), 就称其为**基本解组**. 可以证明: 1° 对方程 (3) 总存在基本解组, 以及 2° 如果 (7) 是方程 (3) 的基本解组, 那么方程 (3) 的每一个解 $\varphi(t)$ 都可以表示为形式:

$$\varphi(t)=c^1\varphi_1(t)+\cdots+c^n\varphi_n(t)\,, \tag{8}$$

其中 $c^1,\cdots,c^r$ 是适当选取的常数 (对于常系数线性方程组的基本解组已在 §14 中作出).

我们首先证明方程 (3) 基本解组的存在性. 设

$$\boldsymbol{a}_1,\ \ \boldsymbol{a}_2,\ \ \cdots,\ \ \boldsymbol{a}_n$$

是任意的线性无关常向量组 (这里的 n 是方程组 (2) 的阶数). 我们按照初始条件

$$\varphi_i(t_0)=\boldsymbol{a}_i\,,\quad i=1,\cdots,n$$

来确定解 (7), 其中 t_0 是 t 的某个值. 因为按照假设, 向量 $\varphi_1(t_0),\ \cdots,\varphi_n(t_0)$ 是线性无关的, 所以根据命题 (B), 解组 (7) 也是线性无关的, 也就是说, 它们构成了基本解组.

其次我们来证明, 每个解 $\varphi(t)$ 都可以表示成形式 (8). 设 t_0 是时间 t 的某个值. 由于解组 (7) 是线性无关的, 所以向量 $\varphi_1(t_0),\ \cdots,\varphi_n(t_0)$ 也是线性无关的 (见 (B)), 又因为它们的个数等于所讨论向量空间的维数, 所以它们构成这个空间的基. 因此向量 $\varphi(t_0)$ 可以写成形式:

$$\varphi(t_0)=c^1\varphi_1(t_0)+\cdots+c^n\varphi_n(t_0), \tag{9}$$

其中 $c^1,\cdots,c^r$ 是适当选取的常数. 于是解 $\varphi(t)$ 和 $c^1\varphi_1(t)+\cdots+c^n\varphi_n(t)$ 有相同的初始条件 (见 (9)), 从而它们完全一样, 因此等式 (8) 成立.

现在我们转到所得事实的坐标描述, 并建立其他的一些结果.

(D) 设

$$\varphi_1(t),\ \varphi_2(t),\ \cdots,\varphi_n(t) \tag{10}$$

是方程 (3) 的某组解. 解 $\varphi_k(t)$ 在坐标形式下写为成

$$\varphi_k(t)=(\varphi_k^1(t),\cdots,\varphi_k^n(t))\,.$$

现在构造矩阵

$$\begin{bmatrix} \varphi_1^1(t) \cdots \varphi_k^1(t) \cdots \varphi_n^1(t) \\ \varphi_1^2(t) \cdots \varphi_k^2(t) \cdots \varphi_n^2(t) \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ \varphi_1^n(t) \cdots \varphi_k^n(t) \cdots \varphi_n^n(t) \end{bmatrix}, \tag{11}$$

它的第 k 列是方程组 (2) 的解 $\varphi_k(t)$, 或者确切地说是 $\varphi_k(t)$ 的坐标. 把这个矩阵的行列式记为 $W(t)$; 并称它为解组 (10) 的**朗斯基** (Wronsky) **行列式**. 显然, 如果解组 (10) 是线性无关的, 那么就没有一个 t 值能使朗斯基行列式 $W(t)$ 成为零. 这时, 解组 (10) 就是一个基本解组. 其次, 如果解组 (10) 是线性相关的, 那么朗斯基行列式就恒等于零. 在解组 (10) 是基本解组的情况下, 我们就称矩阵 (11) 为**基本解阵**.

我们现在证明, 一个由变量 t 的函数构成的任意给定 n 阶方阵, 在满足一些很自然的条件下, 必定是某个形式方程组 (2) 的基本解阵.

(E) 假设矩阵 (11) 是任意给定的变量 t 的函数矩阵, 它在区间 $q_1<t<q_2$ 上连续可微, 而且其行列式在这个区间上无处为零. 可以证明, 这个矩阵 (11) 是某个 (唯一的) 方程组 (2) 定义在区间 $q_1<t<q_2$ 上的基本解阵.

为了证明这个结果, 我们用式子写出命题: 其坐标构成矩阵 (11) 第 k 列的向量函数 $\varphi_k(t)$ 是方程 (3) 的解. 于是我们有

$$\dot{\varphi}_k^i(t)=\sum_{j=1}^{n}a_j^i(t)\varphi_k^j(t),\quad i,k=1,\cdots,n\,. \tag{12}$$

如果在这个关系式中把指标 i 固定, 只变动指标 k, 那么所得到的一组关系式可以看成是关于未知的 $a_1^i(t),\cdots,a_n^i(t)$ 的线性代数方程组. 这方程组是唯一可解的, 因为它的系数矩阵是由矩阵 (11) 转置得到, 因此它的行列式不等于零. 于是, 对每个固定的 i, 从关系式 (12) 唯一地求出函数 $a_j^i(t)$, 而且它们是连续函数, 因为函数 $\dot{\varphi}_k^i(t)$ 和 $\varphi_k^i(t)$ 都是连续的.

刘维尔 (Liouville) 公式

在证明命题 (G) 时我们需要行列式的求导规则. 我们在此给出.

(F) 设 $(\varphi_j^i(t))$ 是 n 阶方阵, 它的元素是变量 t 的可微函数, 又令 $W(t)$ 是这个矩阵的行列式. 这个行列式的导数 $\dot{W}(t)$ 可以用下面公式计算:

$$\dot{W}(t) = W_1(t) + \cdots + W_n(t)\,. \tag{13}$$

等式右边的第 i 项 $W_i(t)$ 用如下方法确定: 在矩阵 $(\varphi_j^i(t))$ 中对 t 求导第 i 行的所有元素, 而其余各行保持不变; 所得到矩阵的行列式就是 $W_i(t)$. 显然, 行与列的位置可以互换.

为了证明公式 (13), 我们首先把 n 阶方阵 (u_j^i) 的行列式 U 看成是这个矩阵所有元素 u_j^i, $(i,j=1,\cdots,n)$ 的函数, 且认为这些元素都是自变量. 计算函数 U 关于变量 u_s^r 的偏导数

$$\frac{\partial U}{\partial u_s^r}\,,$$

这里 r 和 s 是固定的. 用 V_i^j 来记矩阵 (u_j^i) 中元素 u_j^i 的代数余子式, 因此有

$$U = \sum_{j=1}^n u_j^r V_r^j\,. \tag{14}$$

这公式给出行列式 U 关于第 r 行元素的展开式. 由于代数余子式 V_r^j 与变量 u_s^r 无关, 因此, 对 u_s^r 求导等式 (14), 我们得到

$$\frac{\partial U}{\partial u_s^r} = V_r^s\,. \tag{15}$$

如果令 $u_j^i = \varphi_j^i(t)$, 那么我们就有 $U = W(t)$. 把 $W(t)$ 看成复合函数对 t 进行求导, 于是由公式 (15) 我们得到

$$\dot{W}(t) = \sum_{i,j} \frac{\partial U}{\partial u_j^i}\dot{\varphi}_j^i(t) = \sum_{i,j}\dot{\varphi}_j^i(t)V_i^j = \sum_{i=1}^n\left(\sum_{j=1}^n \dot{\varphi}_j^i(t)V_i^j\right)\,.$$

因为显然有

$$\sum_{j=1}^n \dot{\varphi}_j^i(t)V_i^j = W_i(t)\,,$$

所以公式 (13) 得证.

现在转到证明所谓的**刘维尔公式**.

(G) 设 $W(t)$ 是方程 (2) 基本解组的朗斯基行列式; 于是公式

$$W(t) = W(t_0)\exp\left(\int_{t_0}^t S(\tau)d\tau\right) \tag{16}$$

成立, 其中 $S(t)$ 是矩阵 $A(t)$ 的迹 (即主对角线元素之和)

$$S(t) = a_1^1(t) + a_2^2(t) + \cdots + a_n^n(t)\,.$$

为了证明公式 (16), 我们来推导朗斯基行列式所满足的微分方程.

我们利用公式 (13) 来计算这个行列式的导数 $\dot{W}(t)$. 为了用更容易理解的方法来进行计算, 我们把矩阵 (11) 的行看成向量, 即令

$$\boldsymbol{\chi}^i(t) = (\varphi_1^i(t), \cdots, \varphi_n^i(t)), \quad i = 1, \cdots, n.$$

关系式 (12) 现在可以写成形式:

$$\dot{\boldsymbol{\chi}}^i(t) = a_1^i(t)\boldsymbol{\chi}^1(t) + \cdots + a_n^i(t)\boldsymbol{\chi}^n(t). \tag{17}$$

这个关系式说明矩阵 (11) 第 i 行的导数是同一个矩阵各行的线性组合. 因此, 在计算行列式 $W_i(t)$ 时, 我们应当把行列式 $W(t)$ 的第 i 行换成这个行列式各行的线性组合 (17). 因为把其他各行的倍数加到给定的一行时, 行列式的值不变, 所以行列式 $W_i(t)$ 从以 $a_i^i(t)$ 乘行列式 $W(t)$ 的第 i 行而得到, 因此我们有

$$W_i(t) = a_i^i(t)W(t).$$

于是由公式 (13) 我们得到

$$\dot{W}(t) = S(t)W(t).$$

这个方程满足初始条件

$$W(t)|_{t=t_0} = W(t_0)$$

的唯一解就是 (16). 因此刘维尔公式得证.

常数变易法

我们现在转到非齐次方程组的研究.

设

$$\dot{\boldsymbol{y}} = A(t)\boldsymbol{y} + \boldsymbol{b}(t) \tag{18}$$

是非齐次方程组 (1) 的向量写法, 且令 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{\psi}(t)$ 是这个方程的某个解. 除了方程 (18) 之外, 我们还考察对应的齐次方程 (3) . 从 § 6 中的命题立即得出, 方程 (18) 的任一个解都可以写成形式:

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{\varphi}(t) + \boldsymbol{\psi}(t),$$

其中 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ 是方程 (3) 的任一解. 因此, 求解非齐次方程 (18) 就归结为求解齐次方程以及求出非齐次方程的一个特解. 于是我们将证明, 在知道了齐次方程 (3) 的基本解组之后, 可以 (借助于求积) 求出非齐次方程的特解.

(H) (常数变易法) 设

$$\boldsymbol{\varphi}_1(t), \cdots, \boldsymbol{\varphi}_n(t)$$

是齐次方程 (3) 的基本解组. 我们要找出方程 (18) 形式为

$$\boldsymbol{y} = c^1(t)\boldsymbol{\varphi}_1(t) + \cdots + c^n(t)\boldsymbol{\varphi}_n(t) \tag{19}$$

的解, 其中系数是 t 的未知函数. 把 $\boldsymbol{y}$ 的这个表达式代入方程 (18), 即得

$$\begin{aligned}&\dot{c}^1(t)\boldsymbol{\varphi}_1(t) + \cdots + \dot{c}^n(t)\boldsymbol{\varphi}_n(t) + c^1(t)\dot{\boldsymbol{\varphi}}_1(t) + \cdots + c^n(t)\dot{\boldsymbol{\varphi}}_n(t)\\ &\quad = A(t)(c^1(t)\boldsymbol{\varphi}_1(t) + \cdots + c^n(t)\boldsymbol{\varphi}_n(t)) + \boldsymbol{b}(t),\end{aligned}$$

由此并注意到 $\boldsymbol{\varphi}_1(t), \cdots, \boldsymbol{\varphi}_n(t)$ 是方程 (3) 的解, 我们得到

$$\dot{c}^1(t)\boldsymbol{\varphi}_1(t) + \cdots + \dot{c}^n(t)\boldsymbol{\varphi}_n(t) = \boldsymbol{b}(t). \tag{20}$$

由于 $\boldsymbol{\varphi}_1(t), \cdots, \boldsymbol{\varphi}_n(t)$ 对每一个 t 值都是线性无关的向量, 因此量 $\dot{c}^1(t), \cdots, \dot{c}^n(t)$ 由关系式 (20) 唯一确定, 从而量 $c^1(t), \cdots, c^n(t)$ 可以通过求积求出. 关于 $\dot{c}^1(t), \cdots, \dot{c}^n(t)$ 的方程 (20) 在写成坐标的形式时有形状

$$\sum_{j=1}^{n} \varphi_j^i(t)\dot{c}^j(t) = b^i(t),\ i = 1, \cdots, n. \tag{21}$$

(I) 设 $\Phi(t) = (\varphi_j^i(t))$ 是方程 (3) 的基本解阵, 它当 $t = t_0$ 时为单位阵. 于是非齐次方程 (18) 在初始值 t_0, y_0 之下的解可写成形式:

$$\boldsymbol{y} = \Phi(t)\left(\boldsymbol{y}_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(t)\boldsymbol{b}(t)\,dt\right), \tag{22}$$

其中 $\Phi^{-1}(t)$ 是矩阵 $\Phi(t)$ 的逆矩阵.

直接验证: 当 $t = t_0$ 时, 公式 (22) 给出 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}_0$. 完全一样地, 直接代入方程 (18) 进行验证即知, 公式 (22) 给出方程 (18) 的解. 还可以用常数变易法推出公式 (22). 实际上, 在向量形式下公式 (21) 重写成

$$\Phi(t)\dot{\boldsymbol{c}}(t) = \boldsymbol{b}(t).$$

由此我们找到:

$$\dot{\boldsymbol{c}}(t) = \Phi^{-1}(t)\boldsymbol{b}(t) \quad \text{或者} \quad \boldsymbol{c}(t) = \int \Phi^{-1}(t)\boldsymbol{b}(t)\,dt. \tag{23}$$

其次, 公式 (19) 可以重写成形式:

$$y^i(t) = \sum_{j=1}^{n} \varphi_j^i(t)c^j(t), \quad i = 1, \cdots, n,$$

或者在向量形式下为

$$\boldsymbol{y} = \Phi(t)\boldsymbol{c}(t).$$

将关系式 (23) 中的 $c(t)$ 表达式代入这个公式, 我们得到:

$$y = \Phi(t) \int \Phi^{-1}(t) b(t)\, dt\,. \tag{24}$$

于是, 公式 (24) (从而还有作为它的特殊情形的公式 (22)) 就给出了方程 (18) 的解.

线性方程组的矩阵记法

在一系列情况下把方程 (3) 写成**矩阵形式**较为方便, 这时未知量是方程 (3) 的基本解阵. 这里我们给出这种写法.

(J) 设 (7) 是方程 (3) 的基本解组, 于是

$$\dot{\varphi}_j^i(t) = \sum_{\alpha=1}^{n} a_\alpha^i(t) \varphi_j^\alpha(t)\,.$$

在矩阵形式下, 这个关系式取形式:

$$\dot{\Phi}(t) = A(t)\Phi(t), \tag{25}$$

其中 $\dot{\Phi}(t)$ 是基本解阵 $\Phi(t) = (\varphi_j^i(t))$ 关于时间 t 的导数, 亦即 $\dot{\Phi}(t) = (\dot{\varphi}_j^i(t))$. 因此, 方程 (3) 的基本解阵 $\Phi(t)$ 满足方程 (25); 而且, 矩阵方程

$$\dot{X} = A(t)X \tag{26}$$

的每一个解 $X(t)$, 只要它的行列式不为零, 就是方程 (3) 的基本解阵, (26) 式中的 X 是未知矩阵. 今后方程 (26) 的解都将只理解为这种满足方程 (26) 且其行列式不为零的矩阵 $X(t)$. 显然求出矩阵方程 (26) 的一个解等价于求出方程 (3) 所有的解. 我们注意到, 如果 $X = \Phi(t)$ 和 $X = \widehat{\Phi}(t)$ 是矩阵方程 (26) 的两个解, 那么就存在这样的常数矩阵 P, 使得

$$\widehat{\Phi}(t) = \Phi(t)P\,. \tag{27}$$

我们来证明最后的关系式. 令

$$\Phi(t) = (\varphi_j^i(t)), \quad \varphi_j(t) = (\varphi_j^1(t), \cdots, \varphi_j^n(t)),$$

$$\widehat{\Phi}(t) = (\widehat{\varphi}_j^i(t)), \quad \widehat{\varphi}_j(t) = (\widehat{\varphi}_j^1(t), \cdots, \widehat{\varphi}_j^n(t));$$

于是

$$\varphi_1(t), \cdots, \varphi_n(t) \tag{28}$$

是方程 (3) 的基本解组, 而由于 $\widehat{\varphi}_j(t)$ 也是方程 (3) 的解, 所以它可以由基本解组 (28) 来表示, 这样我们就有

$$\widehat{\varphi}_j(t) = \sum_{\alpha=1}^{n} p_j^\alpha \varphi_\alpha(t).$$

把这个关系式重新写成数量形式, 我们得到:

$$\widehat{\varphi}_j^i(t) = \sum_{\alpha=1}^{n} \varphi_\alpha^i(t) p_j^\alpha \,. \tag{29}$$

关系式 (27) 就是当 $P = (p_j^i)$ 时关系式 (29) 的矩阵写法.

(K) 在方程 (3) 中利用变换

$$\boldsymbol{y} = S(t)\boldsymbol{x} \tag{30}$$

引进新的未知向量 $\boldsymbol{y}$, 其中 $S(t) = (s_j^i(t))$ 是一个依赖于 t 的非退化矩阵. 对于新未知向量函数 $\boldsymbol{y}$ 的方程有形式:

$$\dot{\boldsymbol{y}} = (\dot{S}(t) + S(t)A(t))S^{-1}(t)\boldsymbol{y}\,, \tag{31}$$

这仍然是类型 (3) 的方程. 与向量变量变换 (30) 相对应的是矩阵变量变换 (见 (J)):

$$Y = S(t)X\,. \tag{32}$$

首先推导未知向量 $\boldsymbol{y}$ 的方程 (31). 我们有

$$\dot{\boldsymbol{y}} = \frac{d}{dt}(S(t)\boldsymbol{x}) = \dot{S}(t)\boldsymbol{x} + S(t)\dot{\boldsymbol{x}}$$

$$= (\dot{S}(t) + S(t)A(t))\boldsymbol{x} = (\dot{S}(t) + S(t)A(t))S^{-1}(t)\boldsymbol{y}\,.$$

为了建立与向量未知量变换 (30) 相对应的矩阵未知量变换 (32), 我们把变换 (30) 重写成数量形式:

$$y^i = \sum_{\alpha=1}^{n} s_\alpha^i(t) x^\alpha\,.$$

变换 (30) 使方程 (3) 的基本解组向量 $\varphi_j(t) = (\varphi_j^1(t), \cdots, \varphi_j^n(t))$ 按照公式

$$\psi_j^i(t) = \sum_{\alpha=1}^{n} s_\alpha^i(t) \varphi_j^\alpha(t)$$

对应于向量 $\psi_j(t) = (\psi_j^1(t), \cdots, \psi_j^n(t))$. 因此方程 (3) 的基本解阵 $\Phi(t)$ 按照公式

$$\Psi(t) = S(t)\Phi(t)$$

对应于方程 (31) 的基本解阵 $\Psi(t)$, 这就意味着矩阵未知量按照公式 (32) 进行变换.

例题

由命题 (C) 看出, 为了求出方程 (3) 所有的解, 只需找到它的基本解组, 也就是它的 n 个线性无关解. 我们来证明, 知道了方程组 (2) 的一个非平凡解后, 就可以把方程组 (2) 降低一阶, 也就是把它归结为 $n-1$ 阶线性方程组的求解.

设

$$\boldsymbol{\varphi}(t) = (\varphi^1(t), \cdots, \varphi^n(t))$$

是方程 (3) 的解, 或者同样地, 是方程组 (2) 的解. 我们来求方程组 (3) 的形式为

$$\boldsymbol{x} = u\boldsymbol{\varphi}(t) + \boldsymbol{y} \tag{33}$$

的解, 其中 u 是未知函数, 而 $\boldsymbol{y}$ 是未知向量, 我们将假设它的第一个分量等于零:

$$\boldsymbol{y} = (0, y^2, \cdots, y^n).$$

把公式 (33) 中的向量 $\boldsymbol{x}$ 代入方程 (3), 即得

$$\dot{u}\boldsymbol{\varphi}(t) + u\dot{\boldsymbol{\varphi}}(t) + \dot{\boldsymbol{y}} = A(t)(u\boldsymbol{\varphi}(t) + \boldsymbol{y}).$$

考虑到 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ 是方程 (3) 的解, 由此得到

$$\dot{u}\boldsymbol{\varphi}(t) + \dot{\boldsymbol{y}} = A(t)\boldsymbol{y}.$$

用坐标形式写出这个方程, 同时在所得到的方程组中把第一个方程分开写出:

$$\dot{u}\varphi^1(t) = \sum_{j=2}^{n} a_j^1(t) y^j, \tag{34}$$

$$\dot{y}^i = \sum_{j=2}^{n} a_j^i(t) y^j - \dot{u}\varphi^i(t), \quad i = 2, \cdots, n. \tag{35}$$

从方程 (34) 确定 $\dot{u}$, 并把所得到的值代入关系式 (35), 即得

$$\dot{y}^i = \sum_{j=2}^{n} b_j^i(t) y^j, \quad i = 2, \cdots, n, \tag{36}$$

其中

$$b_j^i(t) = a_j^i(t) - \frac{\varphi^i(t)}{\varphi^1(t)} a_j^1(t).$$

应当注意, 把从 (34) 求出的 $\dot{u}$ 值代入 (35) 时, 只有在函数 φ^1 不等于零的区间上才是可能的. 现在如果 $\boldsymbol{\psi}(t) = (\psi^2(t), \cdots, \psi^n(t))$ 是方程组 (36) 的任一个解, 那么, 再从关系式

$$\dot{u}\varphi^1(t) = \sum_{j=2}^{n} a_j^1(t) \psi^j(t)$$

借助于求积就得到了原来方程组 (2) 形式为

$$x = u\varphi(t) + \psi(t)$$

的解.

§18. n 阶线性方程

这里将考察 n 阶线性方程:

$$y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(t)y = b(t)\,, \tag{1}$$

我们将假设其中系数 $a_i(t)$ 和自由项 $b(t)$ 在区间 $q_1 < t < q_2$ 上有定义且连续. 在这里对方程 (1) 的研究将按照 §4 中所说的方法把它化成标准线性方程组的思路来进行.

基本解组

(A) 为了把方程 (1) 化为标准线性方程组, 我们引进新的未知函数

$$x^1 = y, \quad x^2 = \dot{y}, \quad \cdots, \quad x^n = y^{(n-1)}\,,$$

这些新的未知函数 $x^1, \cdots, x^n$ 满足线性方程组 (见 §4, (A)):

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = x^2, \\ \dot{x}^2 = x^3, \\ \cdots\cdots\cdots \\ \dot{x}^{n-1} = x^n, \\ \dot{x}^n = -a_n(t)x^1 - a_{n-1}(t)x^2 - \cdots - a_1(t)x^n + b(t)\,. \end{cases}$$

将得到的方程组写成向量形式:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}(t), \tag{2}$$

其中矩阵 $A(t)$ 有形式:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n(t) & -a_{n-1}(t) & -a_{n-2}(t) & \cdots & -a_1(t) \end{bmatrix}, \tag{3}$$

而向量 $\boldsymbol{b}(t)$ 按以下公式确定:

$$\boldsymbol{b}(t) = (0, 0, \cdots, 0, b(t)).$$

方程 (1) 和 (2) 是相互等价的; 也就是说, 方程 (1) 的每个解 $y = \psi(t)$, 对应着方程组 (2) 的解

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\varphi}(t) = (\psi(t), \dot{\psi}(t), \cdots, \psi^{(n-1)}(t));$$

反之, 方程组 (2) 的每个解

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\varphi}(t) = (\varphi^1(t), \varphi^2(t), \cdots, \varphi^n(t)),$$

对应着方程 (1) 的解

$$y = \varphi^1(t),$$

而且这个对应是一一对应. 如果方程 (1) 的解 $\psi(t)$ 和方程组 (2) 的解 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ 在上述意义下互相对应, 那么我们就记为

$$\psi(t) \rightleftharpoons \boldsymbol{\varphi}(t).$$

从方程 (1) 和 (2) 的等价性, 特别地推出方程 (1) 的每个解都可以延拓到整个区间 $q_1 < t < q_2$ 上 (见定理 3), 因此, 今后我们将认为方程 (1) 的每个所考察解都定义在这个区间上, 并且每个所考虑的 t 值也属于它.

首先我们研究齐次方程

$$y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(t)y = 0. \tag{4}$$

设

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A(t)\boldsymbol{x} \tag{5}$$

是与它对应的方程组, 它是用向量的记法写出的, 其中矩阵 $A(t)$ 由公式 (3) 确定.

(B) 设

$$\psi_1(t), \psi_2(t), \cdots, \psi_r(t) \tag{6}$$

是方程 (4) 的某一组解. 直接可以验证, 函数

$$\psi(t) = c^1\psi_1(t) + \cdots + c^r\psi_r(t)$$

也是方程 (4) 的解, 其中 $c^1, \cdots, c^r$ 为任意常数. 如果存在不全为零的常数 $c^1, \cdots, c^r$ 使得

$$c^1\psi_1(t) + \cdots + c^r\psi_r(t) \equiv 0, \tag{7}$$

那么就称解组 (6) 为**线性相关的**. 可以证明, 如果

$$\boldsymbol{\varphi}_1(t), \boldsymbol{\varphi}_2(t), \cdots, \boldsymbol{\varphi}_r(t) \tag{8}$$

是方程组 (5) 对应于解组 (6) 的解 (见 (A)):

$$\psi_i(t) \rightleftharpoons \boldsymbol{\varphi}_i(t), \quad i = 1, \cdots, r,$$

那么解组 (8) 线性相关 (见 §17,(B)) 当且仅当解组 (6) 线性相关的.

我们来证明这个事实. 假设解组 (6) 线性相关, 亦即关系式 (7) 成立. 写下关系式 (7) 以及将它对 t 逐次求导至 $n-1$ 次而得到的那些关系式, 我们得到

$$\begin{cases} c^1\psi_1(t) + \cdots + c^r\psi_r(t) = 0\,, \\ c^1\dot{\psi}_1(t) + \cdots + c^r\dot{\psi}_r(t) = 0\,, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ c^1\psi_1^{(n-1)}(t) + \cdots + c^r\psi_r^{(n-1)}(t) = 0\,. \end{cases} \tag{9}$$

注意到

$$\boldsymbol{\varphi}_i(t) = (\psi_i(t), \dot{\psi}_i(t), \cdots, \psi_i^{(n-1)}(t))\,,$$

我们看出, 关系式 (9) 在向量记法下有形式:

$$c^1\boldsymbol{\varphi}_1(t) + \cdots + c^r\boldsymbol{\varphi}_r(t) = 0\,, \tag{10}$$

因此, 在解组 (8) 各个解之间线性相关. 反之, 假设解组 (8) 线性相关, 即关系式 (10) 成立. 在关系 (10) 中, 用每个向量 $\boldsymbol{\varphi}_i(t)$ 的第一个分量来代替该向量本身, 我们就得到关系式 (7), 因此解组 (6) 线性相关.

(C) 如果方程 (4) 的解组

$$\psi_1(t), \cdots, \psi_n(t) \tag{11}$$

线性无关, 就称它为方程 (4) 的**基本解组** (预先约定解组 (11) 中的个数就等于方程 (4) 的阶数). 于是, 方程 (4) 的基本解组存在, 而且如果解组 (11) 是基本的, 那么方程 (4) 的每一个解都可以写成形式:

$$\psi(t) = c^1\psi_1(t) + \cdots + c^r\psi_n(t),$$

其中 $c^1, \cdots, c^n$ 是为任意常数. 由所述即见, 为了求出方程 (4) 所有的解, 只需找出它的基本解组. (对于常系数线性齐次方程的基本解组已经在 §7 和 §8 中作出).

我们首先证明方程 (4) 基本解组的存在性. 为此利用方程 (5) 基本解组存在的事实 (见 §17,(C)). 令

$$\boldsymbol{\varphi}_1(t), \cdots, \boldsymbol{\varphi}_n(t) \tag{12}$$

为方程 (5) 的基本解组, 且设

$$\psi_1(t), \cdots, \psi_n(t) \tag{13}$$

为方程 (4) 与解组 (12) 相对应的解 (见 (A)):

$$\psi_i(t) \rightleftharpoons \varphi_i(t), \quad i = 1, \cdots, n.$$

由于解组 (12) 线性无关, 所以根据 (B), 解组 (13) 也线性无关, 因此它们构成基本解组. 现在假设解组 (11) 是方程 (4) 的基本解组, 且令解组 (12) 对应于解组 (11). 并且假设 $\psi(t)$ 是方程 (4) 的任意解, 而 $\varphi(t)$ 是方程 (5) 与它相对应的解. 由于按照假设, 解组 (11) 是基本解组, 即线性无关, 所以与它相对应的解 (12) 也是线性无关的, 亦即是方程 (5) 的基本解组. 因此, 由 §17 的命题 (C), 我们得到

$$\varphi(t) = c^1\varphi_1(t) + \cdots + c^n\varphi_n(t).$$

在这个关系式中把每个向量换成它的第一个分量, 即得

$$\psi(t) = c^1\psi_1(t) + \cdots + c^n\psi_n(t).$$

于是, 命题 (C) 得证.

(D) 称行列式

$$W(t) = \begin{vmatrix} \psi_1(t) & \cdots & \psi_n(t) \\ \dot{\psi}_1(t) & \cdots & \dot{\psi}_n(t) \\ \vdots & & \vdots \\ \psi_1^{(n-1)}(t) & \cdots & \psi_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix} \tag{14}$$

为方程 (4) 的解组 (11) 的**朗斯基行列式**. 如果方程 (5) 的解组 (12) 与解组 (11) 相对应 (见 (A)), 那么方程 (5) 的解组 (12) 的朗斯基行列式 (见 §17, (D)) 与行列式 (14) 相同; 这个事实可以直接看出. 因此, 对于组 (12) 的朗斯基行列式成立的命题对行列式 (14) 也成立. 根据 §17 的命题 (D) 断定, 行列式 (14) 或者在任一点都不等于零, 或者恒等于零; 为了使得解组 (11) 是线性无关的, 亦即为基本解组, 其必要和充分条件是行列式 (14) 不等于零. 从 §17 中的命题 (G) 推出行列式 (14) 的刘维尔公式为

$$W(t) = W(t_0)\exp\left(-\int_{t_0}^{t} a_1(\tau)d\tau\right). \tag{15}$$

它由 §17 的公式 (16) 得到, 这只要注意到, 矩阵 (3) 的迹, 亦即其对角线上各项之和等于 $-a_1(t)$. 在下面的例题 2 中将给出公式 (15) 较简单的直接证明.

(E) 设

$$z^{(n)} + a_1(t)z^{(n-1)} + \cdots + a_n(t)z = b(t) \tag{16}$$

是非齐次方程, 并令

$$y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(t)y = 0 \tag{17}$$

为与它对应的齐次方程. 从 §6 中的命题直接得出, 如果 $\chi_0(t)$ 是方程 (16) 的特解, 那么方程 (16) 的任意解有形式:

$$z=\psi(t)+\chi_0(t),$$

其中 $\psi(t)$ 是方程 (17) 的解.

常数变易法

(F) 设

$$\psi_1(t),\cdots,\psi_n(t) \tag{18}$$

是方程 (17) 的任一基本解组, 那么可以用如下形式

$$z=c^1(t)\psi_1(t)+\cdots+c^n(t)\psi_n(t) \tag{19}$$

求得方程 (16) 的解, 其中函数

$$\dot{c}^1(t),\cdots,\dot{c}^n(t) \tag{20}$$

作为如下代数方程组

$$\begin{cases}\psi_1(t)\dot{c}^1(t)+\cdots+\psi_n(t)\dot{c}^n(t)=0,\\ \dot{\psi}_1(t)\dot{c}^1(t)+\cdots+\dot{\psi}_n(t)\dot{c}^n(t)=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \psi_1^{(n-2)}(t)\dot{c}^1(t)+\cdots+\psi_n^{(n-2)}(t)\dot{c}^n(t)=0,\\ \psi_1^{(n-1)}(t)\dot{c}^1(t)+\cdots+\psi_n^{(n-1)}(t)\dot{c}^n(t)=b(t)\end{cases} \tag{21}$$

的解而得到. 因为方程组 (21) 关于未知量 (20) 的系数行列式是解组 (18) 的朗斯基行列式, 所以根据命题 (D), 它对每个 t 值都不等于零, 因此从方程组 (21) 可以确定量 (20), 再由它们通过求积即得我们所需要的函数:

$$c^1(t),\cdots,c^n(t).$$

命题 (F) 的证明从 §17 中的命题 (H) 得出. 也可以对它进行直接推导. 我们来做这件事. 假设对量 (20) 加上条件 (21), 我们从公式 (19) 经过求导得到如下的关系式:

$$\begin{aligned}z&=c^1(t)\psi_1(t)+\cdots+c^n(t)\psi_n(t),\\ \dot{z}&=c^1(t)\dot{\psi}_1(t)+\cdots+c^n(t)\dot{\psi}_n(t),\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ z^{(n-1)}&=c^1(t)\psi_1^{(n-1)}(t)+\cdots+c^n(t)\psi_n^{(n-1)}(t),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}z^{(n)} &= c^1(t)\psi_1^{(n)}(t) + \cdots + c^n(t)\psi_n^{(n)}(t)\\ &\quad+\psi_1^{(n-1)}(t)\dot{c}^1(t) + \cdots + \psi_n^{(n-1)}(t)\dot{c}^n(t)\\ &= c^1(t)\psi_1^{(n)}(t) + \cdots + c^n(t)\psi_n^{(n)}(t) + b(t).\end{aligned}$$

把这些表达式代入方程 (16), 我们得到恒等式. 因此, 如果函数 $c^1(t), \cdots, c^n(t)$ 满足关系式 (21), 那么函数 (19) 就是方程 (16) 的解.

例题

1. 如果知道方程 (4) 的非平凡 (即不恒等于零) 的解 $\psi(t)$, 那么这个方程的阶数可以降低一阶, 也就是把求解原来问题归结为求解 $n-1$ 阶线性方程. 为此我们进行变量替换

$$y = \psi(t)v\,, \tag{22}$$

其中 v 是新的未知函数. 我们现在证明, 把 (22) 代入方程 (4) 的左边后, 其结果就导出关于 v 的方程

$$b_0(t)v^{(n)} + b_1(t)v^{(n-1)} + \cdots + b_{n-1}(t)\dot{v} + b_n(t)v = 0\,, \tag{23}$$

其中

$$b_0(t) = \psi(t), \quad b_n(t) \equiv 0\,. \tag{24}$$

因为我们所有的研究都是对首项 (即未知函数的 n 阶导数项) 系数为 1 的 n 阶方程成立的, 所以关系式 (23) 必须用 $b_0(t) = \psi(t)$ 来除, 从而把方程 (23) 化为方程 (4) 只有在 $\psi(t)$ 不成为零的区间内才能成立. 令

$$\frac{b_i(t)}{\psi(t)} = l_i(t)\,,$$

并把未知函数 v 替换为新的未知函数

$$w = \dot{v}\,,$$

于是我们就得到 $n-1$ 阶方程

$$w^{(n-1)} + l_1(t)w^{(n-2)} + \cdots + l_{n-1}w = 0\,.$$

如果这个方程有解 $\chi(t)$, 那么经求积我们就得到方程 (23) 的解 v:

$$v = \int \chi(t)dt\,,$$

而把求出的函数 v 代入 (22) 就得到方程 (4) 的解 y.

我们来证明, 变量替换 (22) 把方程 (4) 化成 (23) 的形式, 而且满足关系式 (24). 求导关系式 (22), 我们得到

$$y^{(k)} = \psi(t)v^{(k)} + \cdots\,,$$

其中没有写出的项含有 v 的阶数低于 k 的导数. 由此得出, 方程 (4) 取形式 (23), 而且 $b_0(t)=\psi(t)$. 由于 $\psi(t)$ 是方程 (4) 的解, 所以 $v=1$ 是方程 (23) 的解. 把解 $v=1$ 代入 (23), 得到 $b_n(t)=0$. 因此, 关系式 (24) 得证.

2. 我们不依靠方程组的刘维尔公式(见 §17 中的公式 (16)), 来对一个 n 阶方程式的刘维尔公式进行证明. 这时我们将利用在 §17 中给出的行列式求导法则 (见 §17, (F)), 根据这个求导法则, 我们从 (14) 得到

$$\dot{W}(t)=W_1(t)+\cdots+W_i(t)+\cdots+W_n(t),$$

其中 $W_i(t)$ 是将朗斯基行列式 $W(t)$ 的第 i 行对 t 求导的结果. 如果 $i<n$, 那么求导第 i 行的结果, 我们得到了与行列式 $W(t)$ 的第 $i+1$ 行完全一样的新第 i 行, 因此我们有

$$W_1(t)=W_2(t)=\cdots=W_{n-1}(t)=0.$$

当求导第 n 行时, 我们得到

$$\psi_1^{(n)}(t),\cdots,\psi_n^{(n)}(t),$$

由方程 (4), 它是行列式 $W(t)$ 各行的线性组合, 而且对于第 n 行的系数是 $-a_1(t)$. 由于在行列式 $W_n(t)$ 中存在着朗斯基行列式的第 1 行到第 $n-1$ 行, 所以在第 n 行的线性组合中的这几行就可以去掉, 于是剩下的只是带有系数 $-a_1(t)$ 第 n 行, 因此对于朗斯基行列式, 我们得到微分方程

$$\dot{W}(t)=-a_1(t)W(t).$$

求解它, 就得到刘维尔公式 (15).

§19. 周期系数的标准线性齐次方程组

在变系数线性方程中,**周期**系数方程起着特别重要的作用. 这一节要讲述周期系数标准线性齐次方程组的一些性质, 对这类方程组引用的性质中其核心的性质是李雅普诺夫定理. 与本书以前所有的讲述相比, 这里对李雅普诺夫定理的证明不是很初等的. 它依靠**矩阵分析**, 其中必要的知识将在本书的附录II讲述. 设

$$\dot{X}=A(t)X \tag{1}$$

是以矩阵形式写出的标准线性齐次方程组 (参看 §17, (J)). 我们假设这方程组的系数是时间 t 以 τ 为周期的周期函数, 亦即矩阵 $A(t)$ 满足条件:

$$A(t+\tau)=A(t).$$

(A) 对于方程 (1) 的任一个 (矩阵的) 解 (参看 §17, (J))

$$X = \Phi(t) \tag{2}$$

总存在这样的 (非退化) 常数矩阵 C, 使得

$$\Phi(t+\tau) = \Phi(t)C.$$

我们称矩阵 C 为解 (2) 的**根本矩阵**. 如果 $X = \widehat{\Phi}(t)$ 是方程 (1) 的另一个解, 而 $\widehat{C}$ 是它的根本矩阵, 那么我们有

$$\widehat{C} = P^{-1}CP, \tag{3}$$

其中 P 是某一个非退化的常数矩阵.

为了证明矩阵 C 的存在性, 我们注意到, 除了解 (2) 之外, 矩阵 $\Phi(t+\tau)$ 也是方程 (1) 的解. 实际上,

$$\dot{\Phi}(t+\tau) = A(t+\tau)\Phi(t+\tau) = A(t)\Phi(t+\tau),$$

因此, 由 §17 中的公式 (27), 我们有

$$\Phi(t+\tau) = \Phi(t)C,$$

其中 C 是常数矩阵.

为了证明公式 (3), 我们也利用 §17 中的公式 (27). 因为 $\widehat{\Phi}(t)$ 是方程 (1) 的解, 所以根据所提到的公式, 我们有

$$\widehat{\Phi}(t) = \Phi(t)P.$$

由此得出

$$\widehat{\Phi}(t+\tau) = \Phi(t+\tau)P = \Phi(t)CP = \widehat{\Phi}(t)P^{-1}CP,$$

这就给出关系式 (3).

(B) 方程 (1) 与方程

$$\dot{Y} = B(t)Y \tag{4}$$

称为**等价的**, 如果存在线性变换 (见 § 17,(K))

$$Y = S(t)X,$$

把方程 (1) 变为方程 (4), 其中 $B(t), S(t)$ 与 $A(t)$ 一样, 都是以 τ 为周期的周期矩阵. 可以证明, 方程 (1) 和 (4) 是等价的当且仅当这两个方程存在具有同一个根本矩阵的解 $X = \Phi(t)$ 和 $Y = \Psi(t)$.

我们来证明这个结论. 首先假设方程 (1) 和 (4) 是等价的. 设 $X = \Phi(t)$ 是方程 (1) 以 C 为根本矩阵的任一解; 于是 $Y = \Psi(t) = S(t)\Phi(t)$ 为方程 (4) 的解, 而且我们有

$$\Psi(t+\tau) = S(t+\tau)\Phi(t+\tau) = S(t)\Phi(t+\tau) = S(t)\Phi(t)C = \Psi(t)C\,,$$

因此, 解 $\Phi(t)$ 的根本矩阵 C 也是 $\Psi(t)$ 的根本矩阵.

现在假设, 方程 (1) 和 (4) 分别存在解 $X = \Phi(t)$ 及 $Y = \Psi(t)$, 它们有同一个根本矩阵 C; 那么我们有

$$\Phi(t+\tau) = \Phi(t)C\,, \quad \Psi(t+\tau) = \Psi(t)C\,.$$

用第一个关系式的逆矩阵 $\Phi^{-1}(t+\tau) = C^{-1}\Phi^{-1}(t)$ 从右边来乘第二个关系式, 我们得到

$$\Psi(t+\tau)\Phi^{-1}(t+\tau) = \Psi(t)\Phi^{-1}(t)\,.$$

因此, 矩阵

$$S(t) = \Psi(t)\Phi^{-1}(t) \tag{5}$$

是以 τ 为周期的周期矩阵, 而且我们有

$$\Psi(t) = S(t)\Phi(t)\,.$$

因为解 $\Phi(t)$ 和 $\Psi(t)$ 中的每一个都唯一地确定了各自的方程 (见 §17, (E)), 所以从 (5) 推出方程 (4) 是由方程 (1) 经过矩阵为 $S(t)$ 的线性变换得到的.

从命题 (A) 和 (B) 看出, 考虑准确到等价性的每一个形式 (1) 的方程 (见 (B)), 都对应着由准确到相似变换所确定的矩阵 C(见 (3)). 而且, 矩阵 C 关于形状 (3) 的相似变换的所有不变量总体, 构成了方程 (1) 由准确到等价性所确定的**不变量完全系**.

应当注意, 命题 (A) 和命题 (B) 中所谈到的一切, 无论所考虑的只是实矩阵的情形, 还是考虑到复矩阵的情形, 都是成立的. 在下面重要的李雅普诺夫定理 (定理 12) 中, 我们将分开实的和复的情形.

定理 12 *每一个周期系数方程 (1) 都等价于 (见 (B)) 一个常系数方程*

$$\dot{Y} = BY\,,$$

其中 B 是常数矩阵, (一般来说, 矩阵 B 是复的.) 如果在方程 (1) 中以 τ 为周期的矩阵 $A(t)$ 是实的, 那么这个方程, 看成以 2τ 为周期时, 等价于常系数方程

$$\dot{Y} = B_1Y\,,$$

其中 B_1 是实常数矩阵, 而且把方程 (1) 变到方程 $\dot{Y} = B_1Y$ 的变换 $S(t)$ 也是实的.

在证明定理 12 之前, 我们先讲述以下命题.

(C) 设

$$\dot{Y} = BY \tag{6}$$

是一个以矩阵形式写出的常系数线性齐次方程组, 这里 B 是常数矩阵. 于是, 矩阵

$$Y = e^{tB} \tag{7}$$

(见 §35, (D)) 是方程 (6) 的解.

为了证明 (7) 是方程 (6) 的解, 把函数 e^{tB} 写成级数形式. 我们有

$$e^{tB} = E + tB + \frac{t^2}{2!}B^2 + \frac{t^3}{3!}B^3 + \cdots.$$

由此, 我们得到导数

$$\frac{d}{dt}e^{tB} = B(E + tB + \frac{t^2}{2!}B^2 + \frac{t^3}{3!}B^3 + \cdots) = Be^{tB}.$$

定理 12 的证明 令 C 是方程 (1) 某个解 $X = \Phi(t)$ 的根本矩阵. 由 § 35 中的命题 (D), 存在矩阵 B, 它满足条件

$$e^{\tau B} = C.$$

我们来证明, 方程 (1) 和方程

$$\dot{Y} = BY \tag{8}$$

是等价的. 事实上, 根据命题 (C), 矩阵 $Y = e^{tB}$ 是方程 (8) 的解. 因此, 如果把方程 (8) 看成以 τ 为周期的周期系数方程, 那么解 $Y = e^{tB}$ 的根本矩阵就是 C, 亦即 (见 §35 的公式 (20))

$$e^{(t+\tau)B} = e^{tB}e^{\tau B} = e^{tB}C.$$

由于方程 (1) 和 (8) 对所考虑的解的根本矩阵完全一样, 所以这两个方程是等价的 (见 (B)).

因此, 定理 12 的第一部分得证.

现在假设 $A(t)$ 是实矩阵, $\Phi(t)$ 是方程 (1) 的某一实解, 且 C 是这个解的根本矩阵, 因此

$$\Phi(t+\tau) = \Phi(t)C. \tag{9}$$

由于 $\Phi(t)$ 是实矩阵, 所以 C 也是实矩阵. 由 (9) 得知

$$\Phi(t+2\tau) = \Phi(t+\tau)C = \Phi(t)C^2. \tag{10}$$

根据 §35 中命题 (D), 存在实矩阵 B_1 满足条件

$$e^{2\tau B_1} = C^2.$$

我们来证明, 当把方程 (1) 和方程

$$\dot{Y} = B_1 Y \tag{11}$$

看成以 2τ 为周期的周期系数方程时是等价的. 事实上, 矩阵 e^{tB_1} 是方程 (11) 的解. 因此, 如果把方程 (11) 看成以 2τ 为周期的周期系数方程, 那么解 $Y = e^{tB_1}$ 的根本矩阵就是 C^2. 由于方程 (1) 和方程 (11) 对所考虑的解的根本矩阵 (见 (10)) 相同, 所以这两个方程是等价的.

于是定理 12 得证.

(D) 设 C 是任意的 n 阶方阵, 其所有特征值的模都小于某一个正数 ρ. 矩阵 C^m 的元素记为 ${}^m c^i_j$, 其中 m 为自然数, 因此 $C^m = ({}^m c^i_j)$. 于是存在与 i, j, m 无关的正数 r, 使得

$$|{}^m c^i_j| < r\rho^m . \tag{12}$$

特别从此得出, 对于任一向量 $\boldsymbol{x}$, 有不等式

$$|C^m \boldsymbol{x}| \leqslant n^2 r \rho^m |\boldsymbol{x}| \tag{13}$$

成立. 为了证明估计式 (12), 我们考虑级数

$$f(z) = 1 + \frac{z}{\rho} + \frac{z^2}{\rho^2} + \cdots + \frac{z^m}{\rho^m} + \cdots ,$$

它的收敛半径显然等于 ρ. 从定理 29 (见 §35) 推出, 矩阵级数

$$f(C) = E + \frac{C}{\rho} + \frac{C^2}{\rho^2} + \cdots + \frac{C^m}{\rho^m} + \cdots$$

收敛, 特别是数项级数

$$\delta^i_j + \frac{{}^1 c^i_j}{\rho} + \frac{{}^2 c^i_j}{\rho^2} + \cdots + \frac{{}^m c^i_j}{\rho^m} + \cdots$$

收敛. 因为这个级数收敛, 因此它所有的项都不超过某个数 r, 而且对所有数对 (i, j) 这个数 r 可以选取为共同的. 于是估计式 (12) 成立.

(E) 令

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A(t)\boldsymbol{x} \tag{14}$$

为矩阵方程 (1) 的向量记法, 且 C 是方程 (1) 某个解 $\Phi(t)$ 的根本矩阵. 矩阵 C 的 k 重特征值 λ 称为方程 (1) 和方程 (14) 的 k 重**特征数**. 由于除了相似变换之外矩阵 C 与方程 (1) 解 $\Phi(t)$ 的随机性选取无关 (参看 (A)), 因此这里定义的方程 (14) 的特征数及其重数是不变量. 如果 λ 是方程 (14) 的 k 重特征数, 那么就称 $\dfrac{1}{\tau} ln\lambda$ 为方程

(14) 的 k **重特征指数**. 假设方程 (14) 所有特征指数的实部都小于某个数 γ, 那么存在正数 R, 使得对于方程 (14) 的任一个解 $\varphi(t)$ 都有估计式

$$|\varphi(t)| \leqslant R|\varphi(0)|e^{\gamma t}, \quad \text{当}\, t \geqslant 0\,\text{时} \tag{15}$$

成立. 现在证明不等式 (15). 令 $\Phi(t)$ 是方程 (1) 满足初始条件 $\Phi(0) = E$ 的解; 于是方程 (14) 的任意解 $\varphi(t)$ 都可写成形式:

$$\varphi(t) = \Phi(t)\varphi(0)\,. \tag{16}$$

把向量 (16) 代入方程 (14) 即可验证此式. 其次我们有

$$\Phi(t+\tau) = \Phi(t)C, \quad \Phi(t+2\tau) = \Phi(t)C^2, \quad \cdots, \quad \Phi(t+m\tau) = \Phi(t)C^m, \quad \cdots. \tag{17}$$

由于在区间 $0 \leqslant t_1 \leqslant \tau$ 上矩阵 $\Phi(t_1)$ 的元素有界, 所以存在正数 σ, 使得

$$|\Phi(t_1)\boldsymbol{x}| \leqslant \sigma|\boldsymbol{x}|, \quad \text{当}\, 0 \leqslant t_1 \leqslant \tau\,\text{时}. \tag{18}$$

其次由于矩阵 C 的所有特征值按模都小于数 $e^{\tau\gamma}$, 所以根据 (13) 对任意向量 $\boldsymbol{x}$ 都有估计式

$$|C^m\boldsymbol{x}| \leqslant n^2 r e^{\tau m\gamma}|\boldsymbol{x}| \tag{19}$$

成立. 现在令 t 为任意正数, 我们来找出这样的非负正数 m, 使得

$$t = m\tau + t_1\,, \quad 0 \leqslant t_1 \leqslant \tau\,.$$

由 (16) 和 (17), 我们有:

$$\varphi(t) = \Phi(m\tau + t_1)\varphi(0) = \Phi(t_1)C^m\varphi(0)\,.$$

按照 (18) 和 (19) 由此得到

$$|\varphi(t)| \leqslant \sigma n^2 r e^{\tau m\gamma}|\varphi(0)|\,.$$

由于数 $e^{t_1\gamma}$ 当 $0 \leqslant t_1 \leqslant \tau$ 时不小于某常数 $c > 0$, 所以最后的不等式可以写成形式:

$$|\varphi(t)| \leqslant \frac{\sigma n^2 r}{c} e^{\gamma t}|\varphi(0)|\,.$$

于是估计式 (15) 得证.

第四章　存在性定理

这里首先证明前面已经陈述过的存在和唯一性定理, 即定理 1, 2, 3. 其次, 讨论解对初始值和参数的连续依赖性问题, 如果方程中含有参数的话. 先分析有固定初始值的解对参数的相依性, 然后用一种十分简单的方法把初始值化为参数, 因此, 问题就归结为解对参数的依赖性. 无论是初始值的情形还是参数的情形, 都要证明解对于这些变量的连续依赖性和解对它们的可微性.

在各种情况下遇到的只是所谓的整体性定理, 而往往在教科书中提到的是一般碰不到的 "局部性" 定理. 这是因为无论在理论本身还是在它的应用中, 重要的只是**整体性**定理; 局部性定理即使在较好的情况下也只是证明整体性定理的一种手段, 而不会受到特别的注意. 这里用到的词 "整体的" 与求积运算毫无关系. 它只意味着不是在很小的时间区间上, 而是 "整体地"、"在全局上" 研究问题的解, 亦即考虑**不可延拓**的解 (见 § 3, (A)). 由于这个缘故, 这里专门用了一节 (§ 22) 来进行不可延拓解的讨论.

除了这些内容以外, 在这一章还包括了一节常微分方程组的首次积分, 以及与首次积分概念有联系的一阶线性偏微分方程研究. 这一节的结果, 在后面的讲述中并不用到.

§20. 一阶方程式存在和唯一性定理的证明

本节要对 §1 中定理 1 所讲的一个一阶方程

$$\dot{x} = f(t, x) \tag{1}$$

解的存在和唯一性给出证明, 其中方程右端和它的偏导数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ 一起在变量 t, x 的平面

P 中某个开集 Γ 上有定义且连续. 在下一节要进行的定理 2 证明比这一节的定理 1 证明要复杂, 而且包含后者作为特殊情形. 首先对一个方程的情况进行证明时, 我有目的地说明这个证明的基本**思想**. 这种思想在一般情况下由于过多的次要细节而显示不出来. 本书用皮卡 (Picard) 的**逐次逼近法**来对定理 1 和 2 进行证明, 这个方法在分析中用于许多存在定理的证明. 同时, 这个方法也是解的近似计算方法, 因此有很大的实用价值. 在某些情况下, 逐次逼近法可以解释为**压缩映射法**. 这里我将用这样的办法来进行证明, 使得能够显示出这两种方法的密切联系. 这两个方法的差别将在证明定理 3 时显露出来.

证明的基本思想

用逐次逼近法证明定理 1 的第一步, 是把微分方程化成**积分方程**, 我们以单独一个命题的形式来对它进行叙述.

(A) 令 $x = \varphi(t)$ 是方程 (1) 定义在区间 $r_1 < t < r_2$ 上的某个解, 故它满足恒等式

$$\dot{\varphi}(t) = f(t, \varphi(t)), \tag{2}$$

并设

$$\varphi(t_0) = x_0 \tag{3}$$

是这个解满足的某个初始条件. 于是函数 $\varphi(t)$ 在整个区间 $r_1 < t < r_2$ 上满足积分恒等式

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, \varphi(\tau))d\tau\,. \tag{4}$$

反之, 如果对于某个连续函数 $\varphi(t)$ 在区间 $r_1 < t < r_2$ 上满足恒等式 (4), 那么函数 $\varphi(t)$ 可微, 且是方程 (1) 满足初始条件 (3) 的解. 简单地说, 积分方程 (4) **等价于**与初始条件 (3) 一起的微分方程 (2).

我们来证明这个命题. 首先假设关系式 (4) 成立. 将其中变量 t 换成它的值 t_0, 即得: $\varphi(t_0) = x_0$. 因此, 从 (4) 推出 (3). 其次, 恒等式 (4) 的右边显然对 t 可微, 所以左边对 t 也可微. 将恒等式 (4) 两边对 t 求导的结果就得到恒等式 (2).

现在假设满足关系 (2) 和 (3). 从积分下限 t_0 到上限 t 积分关系式 (2), 我们得到

$$\varphi(t) - \varphi(t_0) = \int_{t_0}^{t} f(\tau, \varphi(\tau))d\tau\,.$$

由于关系式 (3), 从上面的等式即得 (4) 式.

于是命题 (A) 得证.

我们现在引进一些下面在证明定理 1 时要用到的记号.

(B) 设 $x = \varphi(t)$ 是定义在某个区间 $r_1 \leqslant t \leqslant r_2$ 上的这样的连续函数, 使得它的图形全部位于开集 Γ 中, 而令 t_0 是区间 $r_1 \leqslant t \leqslant r_2$ 上的某一个点. 于是利用恒等式 (4) 的右边, 并借助于等式

$$\varphi^*(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, \varphi(\tau))d\tau, \tag{5}$$

可以使得函数 $\varphi(t)$ 与另一个也是定义在区间 $r_1 \leqslant t \leqslant r_2$ 上的函数 $\varphi^*(t)$ 相对应 (函数 $\varphi^*(t)$ 的图形当然可以不全在集合 Γ 中). 因此, 恒等式 (4) 的右边可以看成使得函数 φ 与函数 φ^* 相对应的算子. 用字母 A 来记这个算子, 我们把关系式 (5) 写成公式

$$\varphi^* = A\varphi. \tag{6}$$

的形式. 利用算子 A, 积分方程 (4) 可写成形状:

$$\varphi = A\varphi. \tag{7}$$

(C) 设 $\varphi(t)$ 是定义在区间 $r_1 \leqslant t \leqslant r_2$ 上的某个连续函数. 这个函数模的最大值

$$\| \varphi \| = \max_{r_1 \leqslant t \leqslant r_2} |\varphi(t)|$$

称为它的**范数** $\| \varphi \|$. 如果 $\psi(t)$ 和 $\chi(t)$ 是定义在区间 $r_1 \leqslant t \leqslant r_2$ 上的两个连续函数, 那么它们差 $\psi(t) - \chi(t)$ 的范数 $\| \varphi - \chi \|$ 是一个相当有力地估计这两函数相互之间差别的非负数. 如果数 $\| \psi - \chi \|$ 很小, 那么函数 ψ 和 χ 彼此就很 "靠近". 等式 $\|\psi - \chi\| = 0$ 成立当且只当函数 ψ 和 χ 完全一样. 利用范数概念就很容易讲述在分析教程中大家知道的有关连续函数序列一致收敛性的条件. 设

$$\varphi_0(t), \varphi_1(t), \cdots, \varphi_i(t), \cdots \tag{8}$$

是一个给定在区间 $r_1 \leqslant t \leqslant r_2$ 上的连续函数列. 设 $\varphi(t)$ 也是定义在同一区间 $r_1 \leqslant t \leqslant r_2$ 上的函数, 如果

$$\lim_{i \to \infty} \|\varphi - \varphi_i\| = 0,$$

那么序列 (8) 就一致收敛于函数 φ. 为了使得序列 (8) 一致收敛, 只要不等式

$$\|\varphi_{i+1} - \varphi_i\| \leqslant a_i$$

成立, 其中非负常数 $a_0, a_1, \cdots, a_i, \cdots$ 组成一个收敛级数 (即 $\sum a_n$ 是一个收敛级数).

在转到仔细推导定理 1 的证明之前, 简略地说明一下用来求解方程 (7) 的逐次逼近法的实质. 给出定义在某个区间 $r_1 \leqslant t \leqslant r_2$ 上的连续函数序列:

$$\varphi_0, \varphi_1, \cdots, \varphi_i, \cdots, \tag{9}$$

这区间包含点 t_0 在其内部. 序列 (9) 中的每个函数都是由它前面的一个函数借助于等式

$$\varphi_{i+1} = A\varphi_i, \quad i = 0, 1, 2, \cdots \tag{10}$$

来确定. 如果函数 φ_i 的图形位于集合 Γ 内, 那么函数 φ_{i+1} 就由等式 (10) 所确定, 但是为了能够确定下一个函数 φ_{i+2}, 还需要使得函数 φ_{i+1} 的图形位于集合 Γ 内部. 正

如我们要证明的, 只要把区间 $r_1 \leqslant t \leqslant r_2$ 取得充分小, 就能做到这一点. 而且依靠缩短区间 $r_1 \leqslant t \leqslant r_2$ 的长度也能做到使序列 (9) 满足不等式

$$\|\varphi_{i+1} - \varphi_i\| \leqslant k\|\varphi_i - \varphi_{i-1}\|, \quad i = 1, 2, \cdots, \tag{11}$$

其中 $0 < k < 1$. 从不等式 (11) 推出不等式

$$\|\varphi_{i+1} - \varphi_i\| \leqslant \|\varphi_1 - \varphi_0\| \cdot k^i, \quad i = 1, 2, \cdots,$$

因此序列 (9) 一致收敛 (见 (C)). 进一步已容易确立序列 (9) 的极限 φ 也满足方程 (7).

这种作法可以用稍微不同的另一种方式 —— 压缩映射法的形式来描述. 选取某个定义在区间 $r_1 \leqslant t \leqslant r_2$ (而且 $r_1 < t_0 < r_2$) 上的函数族 Ω, 使得这些函数的图形都在集合 Γ 内. 我们还假设族 Ω 对于算子 A 满足下列两个条件: 1) 算子 A 作用到族 Ω 中的任一函数, 我们仍然得到族 Ω 中的函数; 2) 存在数 k, $0 < k < 1$, 使得对于族 Ω 中的任意两个函数 ψ 和 χ, 都满足不等式

$$\|A\psi - A\chi\| \leqslant k\|\psi - \chi\|.$$

在这个意义之下, 映像 A 是被压缩的 (正确地应说是 "压缩的").

容易看出, 如果对于族 Ω 满足所述条件, 那么从它的任意函数 φ_0 出发, 我们按递推公式 (10) 得到满足条件 (11) 的无穷序列 (9), 并且正如上面注意到的那样, 它一致收敛于方程 (7) 的解 φ.

现在根据所说的设想来证明定理 1.

定理 1 的证明

方程 (1) 所求解的初始值 t_0 和 x_0 是位于集合 Γ 中点 (t_0, x_0) 的坐标. 首先我们选取以点 (t_0, x_0) 为中心, 其边平行于坐标轴, 且连同边界整个落在集合 Γ 内部的任意矩形 Π (图 39). 矩形 Π 水平的 (平行于 t 轴的) 边长记为 $2q$, 垂直的边长记为 $2a$. 因此, 点 (t, x) 当且只当满足不等式

$$|t - t_0| \leqslant q, \quad |x - x_0| \leqslant a \tag{12}$$

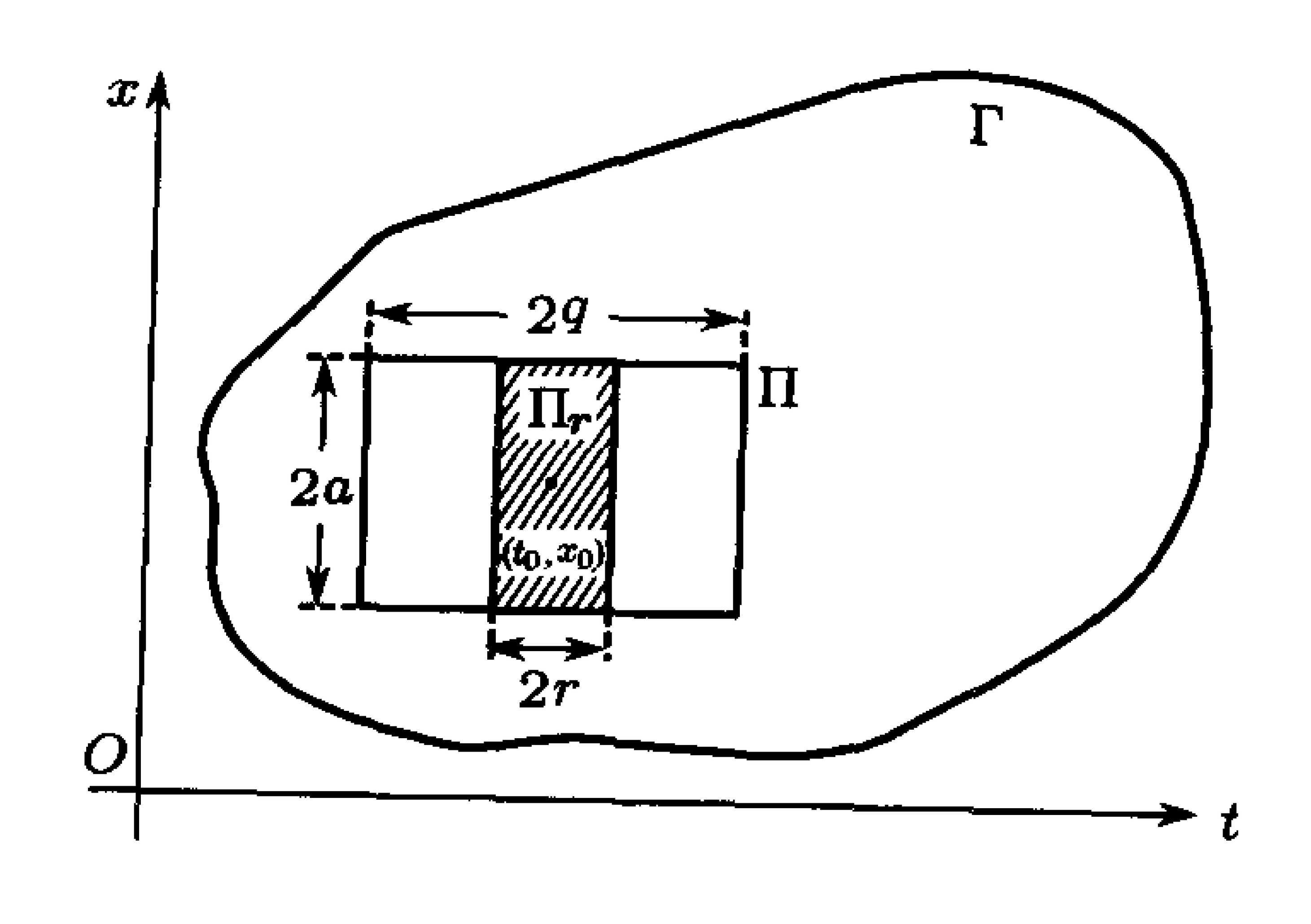


图 39

时才属于矩形 Π. 由于矩形 Π 是含在集合 Γ 内部的**闭集**, 所以定义在它上面的连续函数 $f(t,x)$ 及 $\dfrac{\partial f(t,x)}{\partial x}$ 有界, 因此存在正数 M 和 K, 使得对于满足条件 (12) 的 t 和 x 有不等式

$$|f(t,x)| \leqslant M, \quad \left|\frac{\partial f(t,x)}{\partial x}\right| \leqslant K \tag{13}$$

成立.

除了矩形 Π 以外, 还考虑一个由不等式

$$|t-t_0| \leqslant r, \quad |x-x_0| \leqslant a$$

确定的较 "狭窄" 矩形 Π_r (见图 39), 其中

$$r \leqslant q, \tag{14}$$

以后我们还要更精确地确定数 r. 以 Ω_r 记所有定义在区间 $|t-t_0| \leqslant r$ 上, 且其图形都在矩形 Π_r 中的连续函数族. 因此, 定义在区间 $|t-t_0| \leqslant r$ 上的连续函数 φ 属于族 Ω_r 当且仅当对这区间上的任意 t 有不等式

$$|\varphi(t)-x_0| \leqslant a \tag{15}$$

成立.

我们现在设法选取数 r 使得它满足如下两个条件:

1° 如果函数 φ 属于族 Ω_r, 那么函数 $\varphi^* = A\varphi$ (见 (5),(6)) 也属于族 Ω_r.

2° 存在数 k, $0<k<1$ 使得对于族 Ω_r 中的任意两个函数 ψ 和 χ 有不等式

$$\|A\psi - A\chi\| \leqslant k\|\psi-\chi\| \tag{16}$$

成立.

我们考察条件 1°. 为了使得函数 $\varphi^* = A\varphi$ 属于族 Ω_r, 其必要且充分的条件是当 $|t-t_0| \leqslant r$ 时有不等式

$$|\varphi^*(t)-x_0| \leqslant a$$

成立. 根据 (5) 和 (13) 我们有

$$|\varphi^*(t)-x_0| = \left|\int_{t_0}^{t} f(\tau,\varphi(\tau))d\tau\right| \leqslant Mr.$$

由此看出, 当

$$r \leqslant \frac{a}{M} \tag{17}$$

时条件 1° 满足.

现在考察条件 2°. 我们有

$$\psi^*(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, \psi(\tau))d\tau\,,$$

$$\chi^*(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, \chi(\tau))d\tau\,.$$

从第一式减去第二式, 可得

$$\begin{aligned}\left|\psi^*(t) - \chi^*(t)\right| &= \Big|\int_{t_0}^{t} (f(\tau, \psi(\tau)) - f(\tau, \chi(\tau)))d\tau\Big| \\ &\leqslant \Big|\int_{t_0}^{t} |f(\tau, \psi(\tau)) - f(\tau, \chi(\tau))|d\tau\Big|\,.\end{aligned} \tag{18}$$

我们现在利用拉格朗日公式以及 (13) 中的第二个不等式来估计最后的被积表达式:

$$\begin{aligned}|f(\tau, \psi(\tau)) - f(\tau, \chi(\tau))| &= \left|\frac{\partial f(\tau, \theta)}{\partial x}(\psi(\tau) - \chi(\tau))\right| \\ &\leqslant K\,|\psi(\tau) - \chi(\tau)|\,,\end{aligned} \tag{19}$$

这里的数 θ 介于 $\psi(\tau)$ 和 $\chi(\tau)$ 之间, 亦即满足不等式 $|\theta - x_0| \leqslant a$. 从 (18) 和 (19) 得出:

$$\|A\psi - A\chi\| = \|\psi^* - \chi^*\| \leqslant Kr\|\psi - \chi\|\,.$$

因此, 如果数 $k = Kr$ 小于 1, 也就是如果

$$r < \frac{1}{K}\,, \tag{20}$$

那么条件 2° 就满足. 总之, 如果数 r 满足不等式 (14),(17) 和 (20), 那么对于族 Ω_r, 条件 1° 和 2° 就满足. 以后我们总认为所选取的数 r 是满足不等式 (14), (17) 和 (20) 的.

我们现在来构造定义在区间 $|t - t_0| \leqslant r$ 上的函数序列

$$\varphi_0, \varphi_1, \cdots, \varphi_i, \cdots\,. \tag{21}$$

令

$$\varphi_0(t) \equiv x_0\,, \tag{22}$$

$$\varphi_{i+1} = A\varphi_i\,, \quad i = 0, 1, 2, \cdots\,. \tag{23}$$

因为函数 (22) 属于族 Ω_r, 所以序列 (21) 中的所有函数也都属于这个函数族 (见条件 1°). 其次, 我们有 (见 (15))

$$\|\varphi_1 - \varphi_0\| = \max_{|t-t_0|\leqslant r} |\varphi_1 - x_0| \leqslant a\,.$$

由于 (16), 我们得到:

$$\|\varphi_{i+1}-\varphi_i\| = \|A\varphi_i - A\varphi_{i-1}\| \leqslant k\|\varphi_i-\varphi_{i-1}\|,$$

由此得出

$$\|\varphi_{i+1}-\varphi_i\| \leqslant ak^i, \quad i=0,1,2,\cdots.$$

因此根据 (C), 序列 (21) 中所有的函数都属于族 Ω_r, 从而函数 φ 也属于它 (见 (15)). 我们来证明, 函数 φ 满足方程 (7). 为此注意到序列

$$A\varphi_0, A\varphi_1, \cdots, A\varphi_i, \cdots$$

一致收敛于函数 $A\varphi$; 事实上, 我们有

$$\|A\varphi - A\varphi_i\| \leqslant k\|\varphi-\varphi_i\|.$$

当 $i\to\infty$ 时对关系式 (23) 取极限, 我们得到

$$\varphi = A\varphi.$$

于是, **方程 (1) 满足初始条件 (3) 的解 $x=\varphi(t)$ 的存在性得到了证明; 同时确立了解 $x=\varphi(t)$ 在区间 $|t-t_0|<r$ 上有定义, 其中 r 是满足不等式 (14),(17) 和 (20) 的任意正数.**

我们现在转到唯一性的证明. 假设 $x=\psi(t)$ 和 $x=\chi(t)$ 是方程 (1) 的两个有共同初始值 t_0,x_0 的解, 而区间 $r_1<t<r_2$ 是解 ψ 和 χ 存在区间的交集; 显然, $r_1<t_0<r_2$. 我们证明, 如果解 $\psi(t)$ 和 $\chi(t)$ 在区间 $r_1<t<r_2$ 的某一点 t_1 处相同, 那么它们就要在某个区间 $|t-t_1|<r$ 上完全相同, 这里 r 是充分小的正数. 我们令 $x_1=\psi(t_1)=\chi(t_1)$, 于是量 t_1,x_1 可以取作为两个解 $x=\psi(t)$ 和 $x=\chi(t)$ 的共同初始值. 在这个意义上, 点 (t_1,x_1) 和点 (t_0,x_0) 并无任何区别, 因此对于点 (t_1,x_1) 仍保持记号 (t_0,x_0), 这使我们能沿用以前的其他记号. 把微分方程 (1) 化成积分方程 (4), 我们就得到对于两个函数 $\psi(t)$ 和 $\chi(t)$ 的积分等式, 在算子的写法下, 它们可以写成形式:

$$\psi = A\psi, \quad \chi = A\chi. \tag{24}$$

跟前面一样, 我们现在于开集 Γ 中选取中心在点 (t_0,x_0) 处的矩形 Π, 然后作出 Π_r, 使得 r 除了满足不等式 (14),(17) 和 (20) 之外, 还满足条件: 当 $|t-t_0|\leqslant r$ 时, 函数 ψ 和 χ 有定义且满足不等式

$$|\psi(t)-x_0|\leqslant a, \quad |\chi(t)-x_0|\leqslant a.$$

这是可能的, 因为函数 $\psi(t)$ 和 $\chi(t)$ 是连续的. 于是, 定义在区间 $|t-t_0|\leqslant r$ 上的函数 $\psi(t)$ 和 $\chi(t)$ 包含在族 Ω_r 中, 从而根据不等式 (16) 和关系式 (24) 即得

$$\|\psi-\chi\| = \|A\psi - A\chi\| \leqslant k\|\psi-\chi\|,$$

而要这个不等式能够成立, 只有 $\|\psi-\chi\|=0$, 亦即函数 ψ 和 χ 在区间 $|t-t_0|\leqslant r$ 上完全相同.

我们现在证明, 函数 $\psi(t)$ 和 $\chi(t)$ 在整个区间 $r_1<t<r_2$ 上完全相同. 假设相反, 亦即在区间 $r_1<t<r_2$ 内存在点 t^*, 使得 $\psi(t^*)\neq\chi(t^*)$. 显然, $t^*\neq t_0$. 为了确定起见我们假设 $t^*>t_0$.

我们用 N 来表示区间 $t_0\leqslant t\leqslant t^*$ 上所有使得 $\psi(t)=\chi(t)$ 的点 t 的集合, 并证明集合 N 是闭的. 事实上, 令 $\tau_1,\tau_2,\cdots$ 为集合 N 中点的序列, 它收敛于某一个点 τ. 于是 $\psi(\tau_i)=\chi(\tau_i)$, 因此根据函数 ψ 和 χ 的连续性有

$$\psi(\tau)=\lim_{i\to+\infty}\psi(\tau_i)=\lim_{i\to+\infty}\chi(\tau_i)=\chi(\tau),$$

亦即点 τ 也属于集合 N.

我们用 t_1 来表示集合 N 的上确界. 由于 N 是闭的, 所以 t_1 属于这个集合, 亦即 $\psi(t_1)=\chi(t_1)$; 从而 $t_1<t^*$. 但是根据早先的证明, 函数 $\psi(t)$ 和 $\chi(t)$ 应该在某个区间 $|t-t_1|<r$ 上完全相同, 因此点 t_1 不可能是集合 N 的上确界, 从而导出矛盾.

于是定理 1 得证.

例题

我们用逐次逼近法来对很简单的方程

$$\dot{x}=x$$

进行求解. 所要找的解具有初始值

$$t_0=0,\quad x_0=1.$$

等价的积分方程写成形式:

$$\varphi(t)=1+\int_0^t\varphi(\tau)d\tau.$$

我们现在来构造序列

$$\varphi_0,\varphi_1,\cdots,\varphi_i,\cdots.$$

我们有

$$\begin{aligned}
&\varphi_0(t)\equiv 1,\\
&\varphi_1(t)=1+\textstyle\int_0^t d\tau=1+t,\\
&\varphi_2(t)=1+\textstyle\int_0^t(1+\tau)d\tau=1+t+\dfrac{1}{2!}t^2,\\
&\varphi_3(t)=1+\textstyle\int_0^t(1+\tau+\dfrac{1}{2!}\tau^2)d\tau=1+t+\dfrac{1}{2!}t^2+\dfrac{1}{3!}t^3,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\varphi_n(t)=1+t+\dfrac{1}{2!}t^2+\dfrac{1}{3!}t^3+\cdots+\dfrac{1}{n!}t^n,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

这个序列 (在数轴的任意区间上一致收敛) 的极限是函数 $\varphi(t)=e^t$.

§21. 标准方程组存在和唯一性定理的证明

这里要对标准方程组

$$\dot{x}^i = f^i(t, x^1, \cdots, x^n), \quad i = 1, \cdots, n \tag{1}$$

证明在§3中叙述的存在和唯一性定理2，其中右边函数 $f^i(t, x^1, \cdots, x^n)$ 连同它们的偏导数 $\dfrac{\partial f^i(t, x^1, \cdots, x^n)}{\partial x^j}$，$i, j = 1, \cdots, n$ 在变量 $t, x^1, \cdots, x^n$ 空间的某开集 Γ 上有定义且连续. 令

$$\boldsymbol{x} = (x^1, \cdots, x^n), \tag{2}$$

$$\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}) = (f^1(t, \boldsymbol{x}), f^2(t, \boldsymbol{x}), \cdots, f^n(t, \boldsymbol{x})).$$

我们重写方程组(1)为向量形式（见§14,(A)）:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}). \tag{3}$$

证明将在向量形式下用逐次逼近法来进行，它几乎是上一节给出的定理1证明的逐字重复. 除了定理2的证明之外，这里还要用逐次逼近法给出定理3的证明，但是和定理2的证明相比要作了些改变.

辅助命题

为了能够从容地运用向量记法，我们首先对向量和向量函数来建立一些自然的定义和简单的不等式.

如所熟知，向量(2)的**长度**或者**模** $|\boldsymbol{x}|$ 是用公式

$$|\boldsymbol{x}| = +\sqrt{(x^1)^2 + \cdots + (x^n)^2}$$

来定义的. 我们知道且不难证明：如果 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 是两个向量，那么有不等式

$$|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}| \leqslant |\boldsymbol{x}| + |\boldsymbol{y}|$$

成立. 从这个不等式可推出对于任意个数的向量 $\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_l$ 也有类似的不等式，即

$$|\boldsymbol{x}_1 + \cdots + \boldsymbol{x}_l| \leqslant |\boldsymbol{x}_1| + \cdots + |\boldsymbol{x}_l|. \tag{4}$$

令 $\boldsymbol{\varphi}(t) = (\varphi^1(t), \cdots, \varphi^n(t))$ 是实变量 t 的连续向量函数，亦即其坐标分量为 t 的连续函数的向量. 如果函数 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ 定义在区间 $r_1 < t < r_2$ 上，那么当 $r_1 < t_0 < r_2$ 时，在同样的区间上可以定义向量函数

$$\boldsymbol{\psi}(t) = \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{\varphi}(\tau) d\tau,$$

向量 $\boldsymbol{\psi}(t)$ 的分量 $\psi^1(t),\cdots,\psi^n(t)$ 由公式

$$\psi^i(t)=\int_{t_0}^{t}\varphi^i(\tau)d\tau$$

给出; 同时有不等式

$$\left|\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{\varphi}(\tau)d\tau\right|\leqslant\left|\int_{t_0}^{t}|\boldsymbol{\varphi}(\tau)|d\tau\right| \tag{5}$$

成立. 为了证明这个不等式, 将积分区间分成 m 等份, 令

$$\Delta=\frac{t-t_0}{m};\quad t_k=t_0+k\Delta,\quad k=1,\cdots,m$$

(当 $t>t_0$ 时, 数 Δ 是正的; 当 $t<t_0$ 时, 它是负的). 于是按照向量函数积分的定义, 并根据 (4), 我们有

$$\left|\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{\varphi}(\tau)d\tau\right|=\left|\lim_{m\to\infty}\sum_{k=1}^{m}\boldsymbol{\varphi}(t_k)\Delta\right|\leqslant\lim_{m\to\infty}\sum_{k=1}^{m}|\boldsymbol{\varphi}(t_k)|\cdot|\Delta|=\left|\int_{t_0}^{t}|\boldsymbol{\varphi}(\tau)|d\tau\right|.$$

我们还要对于**向量变量 $\boldsymbol{x}$ 的向量函数**

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})=\left(g^1(x^1,\cdots,x^n),\cdots,g^n(x^1,\cdots,x^n)\right)$$

建立一个不等式, 其中 $\boldsymbol{x}$ 是在变量 $x^1,\cdots,x^n$ 空间中的凸集 Δ 上取值的. 我们假设不等式

$$\left|\frac{\partial g^i(x^1,\cdots,x^n)}{\partial x^j}\right|\leqslant K$$

成立. 其中 K 为正数. 于是可以证明, 对于集合 Δ 中的任意两点 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$, 满足不等于式

$$|\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y})|\leqslant n^2K|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|. \tag{6}$$

为了证明不等式 (6), 我们对连接两点 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 的线段进行考察, 即令

$$\boldsymbol{z}(s)=\boldsymbol{y}+s(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}).$$

当 s 取遍区间 $0\leqslant s\leqslant 1$ 的数值时, 点 $\boldsymbol{z}(s)$ 走遍点 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 的连线, 由于集合 Δ 的凸性, 线段上所有的点始终在 Δ 内. 于是我们得到 (应用拉格朗日公式):

$$g^i(\boldsymbol{x})-g^i(\boldsymbol{y})=g^i(\boldsymbol{z}(1))-g^i(\boldsymbol{z}(0))=\left.\frac{dg^i(\boldsymbol{z}(s))}{ds}\right|_{s=\theta},$$

其中 $0\leqslant\theta\leqslant 1$. 按照复合函数的求导公式计算导数 $\frac{dg^i(\boldsymbol{z}(s))}{ds}$, 我们得到

$$\begin{aligned}\frac{dg^i(\boldsymbol{z}(s))}{ds}&=\frac{dg^i(z^1(s),\cdots,z^n(s))}{ds}\\&=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial g^i(z^1(s),\cdots,z^n(s))}{\partial x^k}\cdot\frac{dz^k(s)}{ds}\\&=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial g^i(z^1(s),\cdots,z^n(s))}{\partial x^k}(x^k-y^k).\end{aligned}$$

因此,

$$|g^i(\boldsymbol{x}) - g^i(\boldsymbol{y})| \leqslant \sum_{k=1}^{n} K|x^k - y^k| \leqslant \sum_{k=1}^{n} K|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}| \leqslant nK|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|.$$

把此不等式两边平方, 并对 i 求和再开方, 我们得到 $|\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{g}(\boldsymbol{y})| \leqslant n^{\frac{3}{2}}K|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}| \leqslant n^2K|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|$.

像在证明定理 1 时那样, 我们先把微分方程 (3) 化成积分方程.

(A) 令 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\varphi}(t)$ 是微分方程 (3) 的某个解, 因此它满足恒等式

$$\dot{\boldsymbol{\varphi}}(t) = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{\varphi}(t)), \tag{7}$$

再令

$$\boldsymbol{\varphi}(t_0) = \boldsymbol{x}_0 \tag{8}$$

是这个解满足的初始条件. 于是, 关系式 (7) 和 (8) 一起等价于关系式

$$\boldsymbol{\varphi}(t) = \boldsymbol{x}_0 + \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{f}(\tau, \boldsymbol{\varphi}(\tau))d\tau. \tag{9}$$

我们来证明这个等价性. 假设积分恒等式 (9) 成立. 在其中令 $t = t_0$, 就得到等式 (8), 而将 (9) 式两边对 t 求导, 就得到恒等式 (7). 现在假设关系式 (7) 和 (8) 都满足. 从 t_0 到 t 积分关系式 (7), 并考虑到关系式 (8) 即得关系式 (9).

(B) 利用恒等式 (9) 的右边, 对于每一个其图形位于集合 Γ 内的向量函数 $\boldsymbol{\varphi}(t)$, 以如下的函数 $\boldsymbol{\varphi}^*(t)$ 同它对应:

$$\boldsymbol{\varphi}^*(t) = \boldsymbol{x}_0 + \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{f}(\tau, \boldsymbol{\varphi}(\tau))d\tau. \tag{10}$$

简单地, 在算子形式下这个关系式可以写成形式:

$$\boldsymbol{\varphi}^* = A\boldsymbol{\varphi}. \tag{11}$$

方程 (9) 现在可写为形式:

$$\boldsymbol{\varphi} = A\boldsymbol{\varphi}. \tag{12}$$

(C) 令 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ 是给定在区间 $r_1 \leqslant t \leqslant r_2$ 上的连续向量函数. 我们定义这个函数的**范数** $\|\boldsymbol{\varphi}\|$ 如下:

$$\|\boldsymbol{\varphi}\| = \max_{r_1 \leqslant t \leqslant r_2} |\boldsymbol{\varphi}(t)|.$$

利用范数概念可以叙述给定在区间 $r_1 \leqslant t \leqslant r_2$ 上的连续向量函数序列

$$\boldsymbol{\varphi}_0, \boldsymbol{\varphi}_1, \cdots, \boldsymbol{\varphi}_i, \cdots \tag{13}$$

一致收敛性的定义. 如果

$$\lim_{i\to\infty} \|\boldsymbol{\varphi} - \boldsymbol{\varphi}_i\| = 0,$$

就称向量函数序列 (13) 一致收敛于给定在同一区间 $r_1 \leqslant t \leqslant r_2$ 上的连续向量函数 φ. 为了使得函数序列 (13) 一致收敛, 其充分条件是满足不等式

$$\|\varphi_{i+1} - \varphi_i\| \leqslant a_i\,,$$

其中数 $a_0, a_1, \cdots, a_i, \cdots$ 组成收敛级数. 我们现在转到定理 2 的证明.

定理 2 的证明

由于点 $(t_0, \boldsymbol{x}_0)$) 属于开集 Γ, 所以存在正数 q 和 a, 使得所有满足条件

$$|t - t_0| \leqslant q\,, \quad |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0| \leqslant a \tag{14}$$

的点 $(t, \boldsymbol{x})$ 都位于集合 Γ 之内. 因为由所有满足条件 (14) 的点 $(t, \boldsymbol{x})$ 所构成的集 Π 是一个有界闭集 (图 40), 因此给定在它上面的连续函数

$$|\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})| \quad 和 \quad \left|\frac{\partial f^i(t, \boldsymbol{x})}{\partial x^j}\right|, \quad i, j = 1, \cdots, n\,,$$

有界, 亦即存在正数 M 和 K, 使得在集合 Π 上有

$$|\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})| \leqslant M\,, \quad \left|\frac{\partial f^i(t, \boldsymbol{x})}{\partial x^j}\right| \leqslant K\,, \quad i, j = 1, \cdots, n\,. \tag{15}$$

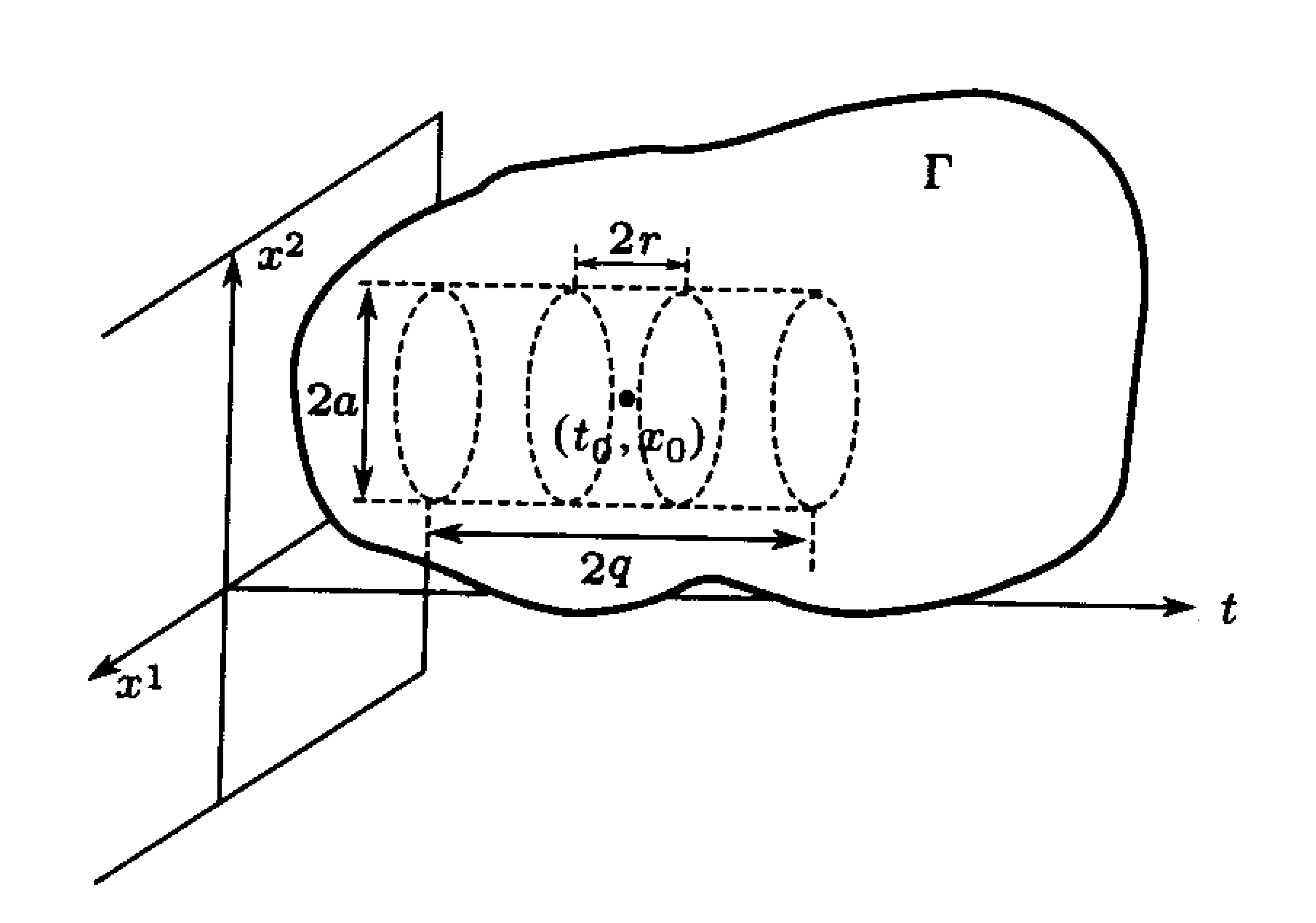


图 40

除了集合 Π 之外, 我们还考虑包含在 Π 内而由不等式

$$|t - t_0| \leqslant r\,, \quad |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0| \leqslant a$$

确定的集合 Π_r, 其中

$$r \leqslant q \tag{16}$$

(图 40). 我们用 Ω_r 表示给定在区间 $|t-t_0| \leqslant r$ 上而图形在 Π_r 之内的所有连续向量函数族. 因此, 定义在区间 $|t-t_0| \leqslant r$ 上的函数 φ 属于族 Ω_r 当且只当对于这个区间上的任意点 t 满足不等式

$$|\boldsymbol{\varphi}(t) - \boldsymbol{x}_0| \leqslant a. \tag{17}$$

我们现在设法选取数 r, 使得下面的两个条件满足:

1° 如果函数 φ 属于族 Ω_r, 那么函数 $\varphi^* = A\varphi$ (见 (10),(11)) 也属于族 Ω_r.

2° 存在数 k, $0 < k < 1$, 使得对于族 Ω_r 中的任意两个函数 ψ 和 χ, 有不等式

$$\|A\boldsymbol{\psi} - A\boldsymbol{\chi}\| \leqslant k\|\boldsymbol{\psi} - \boldsymbol{\chi}\| \tag{18}$$

成立.

我们考虑条件 1°. 为了使得函数 $\varphi^* = A\varphi$ 属于族 Ω_r, 其必要且充分条件是当 $|t-t_0| \leqslant r$ 时满足不等式

$$|\boldsymbol{\varphi}^*(t) - \boldsymbol{x}_0| \leqslant a.$$

根据 (10),(5) 和 (15), 我们有

$$|\boldsymbol{\varphi}^*(t) - \boldsymbol{x}_0| = \left|\int_{t_0}^{t} \boldsymbol{f}(\tau, \boldsymbol{\varphi}(\tau))d\tau\right| \leqslant \left|\int_{t_0}^{t} |\boldsymbol{f}(\tau, \boldsymbol{\varphi}(\tau))|d\tau\right| \leqslant Mr.$$

从此看出, 当

$$r \leqslant \frac{a}{M} \tag{19}$$

时, 条件 1° 成立.

现在考虑条件 2°. 我们有

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{\psi}^*(t) - \boldsymbol{\chi}^*(t)| &\leqslant \left|\int_{t_0}^{t} (\boldsymbol{f}(\tau, \boldsymbol{\psi}(\tau)) - \boldsymbol{f}(\tau, \boldsymbol{\chi}(\tau)))d\tau\right| \\ &\leqslant \left|\int_{t_0}^{t} |\boldsymbol{f}(\tau, \boldsymbol{\psi}(\tau)) - \boldsymbol{f}(\tau, \boldsymbol{\chi}(\tau))|d\tau\right|.\end{aligned} \tag{20}$$

现在估计最后 (20) 式中的被积表达式, 利用不等式 (6) 和 (15) 可得:

$$|\boldsymbol{f}(\tau, \boldsymbol{\psi}(\tau)) - \boldsymbol{f}(\tau, \boldsymbol{\chi}(\tau))| \leqslant n^2K|\boldsymbol{\psi}(\tau) - \boldsymbol{\chi}(\tau)|. \tag{21}$$

于是由 (20) 和 (21) 得到

$$\|A\boldsymbol{\psi} - A\boldsymbol{\chi}\| = \|\boldsymbol{\psi}^* - \boldsymbol{\chi}^*\| \leqslant n^2Kr\|\boldsymbol{\psi} - \boldsymbol{\chi}\|.$$

因此, 如果

$$r \leqslant \frac{k}{n^2K}, \tag{22}$$

其中 $k < 1$, 那么条件 2° 就满足.

总之, 只要数 r 满足不等式 (16),(19) 和 (22) (以后我们总认为是满足的), 那么对于族 Ω_r 来说, 条件 1° 和 2° 就成立.

现在我们构造定义在区间 $|t-t_0|\leqslant r$ 上的向量函数序列

$$\varphi_0(t)\equiv \boldsymbol{x}_0, \varphi_1(t), \cdots, \varphi_i(t), \cdots. \tag{23}$$

令

$$\varphi_{i+1}=A\varphi_i, \quad i=0,1,\cdots. \tag{24}$$

由于函数 φ_0 属于族 Ω_r, 所以序列 (23) 中的所有函数也属于这个函数族 (见条件 1°). 其次, 我们有 (见 (17))

$$\|\varphi_1-\varphi_0\|=\max_{|t-t_0|\leqslant r}|\varphi_1(t)-\boldsymbol{x}_0|\leqslant a.$$

根据 (18) 我们得到

$$\|\varphi_{i+1}-\varphi_i\|=\|A\varphi_i-A\varphi_{i-1}\|\leqslant k\|\varphi_i-\varphi_{i-1}\|,$$

由此得到

$$\|\varphi_{i+1}-\varphi_i\|\leqslant ak^i. \tag{25}$$

因此, 根据 (C), 序列 (23) 一致收敛于族 Ω_r 中的某个连续函数 φ. 我们来证明, 函数 φ 满足方程 (12). 为此我们注意到, 序列

$$A\varphi_0, A\varphi_1, \cdots, A\varphi_i, \cdots$$

一致收敛于函数 $A\varphi$; 事实上, 我们有 (见 (18))

$$\|A\varphi-A\varphi_i\|\leqslant k\|\varphi-\varphi_i\|.$$

当 $i\to+\infty$ 时取关系式 (24) 两边的极限, 即得

$$\varphi=A\varphi.$$

于是, **方程 (3) 满足初始条件 (8) 的解 $\boldsymbol{x}=\varphi(t)$ 的存在性得到了证明; 同时确立了解 $\boldsymbol{x}=\varphi(t)$ 在区间 $|t-t_0|<r$ 上有定义, 其中 r 是满足不等式 (16), (19) 和 (22) 的任意正数.**

我们现在转到唯一性的证明. 假设 $\boldsymbol{x}=\psi(t)$ 和 $\boldsymbol{x}=\chi(t)$ 是方程 (3) 的两个有共同初始值 $t_0,\boldsymbol{x}_0$ 的解, 而区间 $r_1<t<r_2$ 是解 ψ 和 χ 存在区间的交集; 显然, $r_1<t_0<r_2$. 我们证明, 如果解 $\psi(t)$ 和 $\chi(t)$ 在区间 $r_1<t<r_2$ 的某一点 t_1 处相同, 那么它们就要在某个区间 $|t-t_1|<r$ 上完全相同, 这里 r 是充分小的正数. 我们令 $\boldsymbol{x}_1=\psi(t_1)=\chi(t_1)$, 于是量 $t_1,\boldsymbol{x}_1$ 可以取作为两个解 $\boldsymbol{x}=\psi(t)$ 和 $\boldsymbol{x}=\chi(t)$ 的共同初始值.

在这个意义上，点 (t_1, x_1) 和点 (t_0, x_0) 并无任何区别，因此对于点 (t_1, x_1) 仍保持记号 (t_0, x_0)，这使我们能沿用以前的其他记号. 把微分方程 (3) 化成积分方程 (9)，我们就得到对于两个函数 $\psi(t)$ 和 $\chi(t)$ 的积分等式，在算子的写法下，它们可以写成形式：

$$\psi = A\psi, \quad \chi = A\chi. \tag{26}$$

跟前面一样，我们现在于集合 Γ 中选取中心在点 (t_0, x_0)（见不等式 (14)）处、包含在 Γ 内的集合 Π，然后作出 Π_r，使得数 r 除了满足不等式 (16),(19) 和 (22) 之外，还满足条件：当 $|t - t_0| < r$ 时，函数 ψ 和 χ 有定义且满足不等式

$$|\psi(t) - x_0| \leqslant a, \quad |\chi(t) - x_0| \leqslant a.$$

这是可能的，因为函数 $\psi(t)$ 和 $\chi(t)$ 是连续的. 于是，定义在区间 $|t - t_0| < r$ 上的函数 $\psi(t)$ 和 $\chi(t)$ 包含在族 Ω_r 中，从而根据不等式 (18) 和关系式 (26) 即得

$$\|\psi - \chi\| = \|A\psi - A\chi\| \leqslant k\|\psi - \chi\|,$$

而要这个不等式能够成立，只有 $\|\psi - \chi\| = 0$，亦即函数 ψ 和 χ 在区间 $|t - t_0| < r$ 上完全相同.

我们现在证明，函数 $\psi(t)$ 和 $\chi(t)$ 在整个区间 $r_1 < t < r_2$ 上完全相同. 假设相反，亦即在区间 $r_1 < t < r_2$ 内存在点 t^*，使得 $\psi(t^*) \neq \chi(t^*)$. 显然，$t^* \neq t_0$. 为了确定起见我们假设 $t^* > t_0$.

我们用 N 来表示区间 $t_0 \leqslant t \leqslant t^*$ 上所有使得 $\psi(t) = \chi(t)$ 的点 t 的集合，并证明集合 N 是闭的. 事实上，令 $\tau_1, \tau_2, \cdots$ 为集合 N 中点的序列，它收敛于某一个点 τ. 于是 $\psi(\tau_i) = \chi(\tau_i)$，因此根据函数 ψ 和 χ 的连续性有

$$\psi(\tau) = \lim_{i \to +\infty} \psi(\tau_i) = \lim_{i \to +\infty} \chi(\tau_i) = \chi(\tau),$$

亦即点 τ 也属于集合 N.

我们用 t_1 来表示集合 N 的上确界. 由于 N 是闭的，所以 t_1 属于这个集合，亦即 $\psi(t_1) = \chi(t_1)$；从而 $t_1 < t^*$. 但是根据早先的证明，函数 $\psi(t)$ 和 $\chi(t)$ 应该在某个区间 $|t - t_1| < r$ 上完全相同，因此点 t_1 不可能是集合 N 的上确界，从而导出矛盾.

于是定理 2 得证.

现在我们把在证明定理 2 时所形成的某些事实单独写成一个命题，它也是以后所需要的.

(D) 我们假设方程组 (1)（或者在向量形式下的方程 (3)）的右端函数连同它们的偏导数 $\dfrac{\partial f_i}{\partial x^j}$ 一起在开集 Γ 上有定义且连续. 令 (t_0, x_0) 是集合 Γ 中的某一点，而 q 和 a 是这样的正数，使得由一切满足不等式 (14) 的点所组成的集合 Π 被包含在 Γ 中. 其次，令 M 和 K 是这样的正数，使得对于满足不等式 (14) 的所有点 (t, x)，满足不等

式 (15). 最后, 假设 r 是满足不等式 (16), (19), (22) 的任意正数. 那么方程 (3) 以 (t_0, x_0) 为初始值的解在区间 $|t-t_0|<r$ 上有定义. 此外, 这个解在区间 $|t-t_0|\leqslant r$ 上是作为函数序列 (23) 的极限而得到的, 序列中的函数是由递推关系式 (24) 依次给出, 同时这些函数满足不等式 (25).

定理 3 的证明

我们转到定理 3 的证明, 这个定理断定: 对于系数 $a_j^i(t)$ 和自由项 $b^i(t)$ 在区间 $q_1<t<q_2$ 上有定义且连续的标准线性方程组

$$\dot{x}^i=\sum_{j=1}^{n}a_j^i(t)x^j+b^i(t)=f(t,x^1,\cdots,x^n),\quad i=1,\cdots,n, \tag{27}$$

存在于整个区间 $q_1<t<q_2$ 上有定义且有任意初始值

$$t_0,\, x_0^1,\, \cdots,\, x_0^n,\quad q_1<t_0<q_2 \tag{28}$$

的解. 我们来证明, 由运用在定理 2 证明中同样的算子 A (见 (10),(11)) 所产生的向量函数列

$$\varphi_0(t), \varphi_1(t), \cdots, \varphi_i(t), \cdots, \tag{29}$$

在整个区间 $q_1<t<q_2$ 上收敛, 而且在被包含于这个区间内部的任意区间上是一致收敛的, 但是算子 A 现在应由方程 (27) 的右边来确定. 这时可以选取定义在区间 $q_1<t<q_2$ 上的任意连续向量函数作为 $\varphi_0(t)$. 为了运用逐次逼近法, 在这里需要对数量 $\|\varphi_{i+1}-\varphi_i\|$, $i=0,1,2,\cdots$ 进行更精确的估计. 这时将看到, 在所讨论的情况下, 逐次逼近法并不属于压缩映射法的范畴.

设 A 是从微分方程组 (27) 和初始值 (28) 出发而由关系式 (10) 和 (11) 确定的算子. 算子 A 显然作用于任何定义在区间 $q_1<t<q_2$ 上的连续函数 $\varphi(t)$. 由命题 (A) 得出, 方程组 (27) 连同初始条件 (28) 等价于算子方程

$$\varphi=A\varphi, \tag{30}$$

我们来求出它定义在整个区间 $q_1<t<q_2$ 上的解. 由递推关系式

$$\varphi_{i+1}=A\varphi_i,\quad i=0,1,2,\cdots$$

给出的函数序列 (29) 在区间 $q_1<t<q_2$ 上有定义.

令 $r_1\leqslant t\leqslant r_2$ 是任意一个包含点 t_0 在自己内部而又被包含在区间 $q_1<t<q_2$ 内部的区间, 因此有

$$q_1<r_1<t_0<r_2<q_2.$$

我们来证明序列 (29) 在区间 $r_1 \leqslant t \leqslant r_2$ 上一致收敛于方程 (30) 的解. 对于方程 (27) 的右边, 我们有

$$\frac{\partial f^i}{\partial x^j} = a_j^i(t),$$

因此当 $r_1 \leqslant t \leqslant r_2$ 时, 有不等式

$$\left|\frac{\partial f^i}{\partial x^j}\right| \leqslant K, \quad i, j = 1, \cdots, n$$

成立, 其中 K 是某个正数. 因为函数 $\varphi_0(t)$ 和 $\varphi_1(t)$ 在区间 $r_1 \leqslant t \leqslant r_2$ 上有界, 所以在这个区间上有不等式

$$|\varphi_1(t) - \varphi_0(t)| \leqslant C$$

成立, 其中 C 是某个常数. 其次, 在同一区间上我们依次得到 (见 (5) 和 (6)):

$$\begin{aligned}
|\varphi_2(t) - \varphi_1(t)| &= \left|\int_{t_0}^t (\boldsymbol{f}(\tau, \varphi_1(\tau)) - \boldsymbol{f}(\tau, \varphi_0(\tau)))d\tau\right| \\
&\leqslant \left|\int_{t_0}^t |\boldsymbol{f}(\tau, \varphi_1(\tau)) - \boldsymbol{f}(\tau, \varphi_0(\tau))|d\tau\right| \\
&\leqslant n^2KC|t - t_0|; \\
|\varphi_3(t) - \varphi_2(t)| &= \left|\int_{t_0}^t (\boldsymbol{f}(\tau, \varphi_2(\tau)) - \boldsymbol{f}(\tau, \varphi_1(\tau)))d\tau\right| \\
&\leqslant \left|\int_{t_0}^t |\boldsymbol{f}(\tau, \varphi_2(\tau)) - \boldsymbol{f}(\tau, \varphi_1(\tau))|d\tau\right| \\
&\leqslant \frac{(n^2K)^2C}{2!}|t - t_0|^2;
\end{aligned}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\begin{aligned}
|\varphi_{i+1}(t) - \varphi_i(t)| &= \left|\int_{t_0}^t (\boldsymbol{f}(\tau, \varphi_i(\tau)) - \boldsymbol{f}(\tau, \varphi_{i-1}(\tau)))d\tau\right| \\
&\leqslant \left|\int_{t_0}^t |\boldsymbol{f}(\tau, \varphi_i(\tau)) - \boldsymbol{f}(\tau, \varphi_{i-1}(\tau))|d\tau\right| \\
&\leqslant \frac{(n^2K)^iC}{i!}|t - t_0|^i;
\end{aligned}$$

由此得到

$$\|\varphi_{i+1}(t) - \varphi_i(t)\| \leqslant C\frac{(n^2K(r_2 - r_1))^i}{i!}.$$

因为数 $C\dfrac{(n^2K(r_2 - r_1))^i}{i!}$ 组成收敛级数, 所以序列 (29) 在区间 $r_1 \leqslant t \leqslant r_2$ 上一致收敛于某个连续函数 $\varphi(t)$. 对于这个函数我们有

$$\begin{aligned}
\|A\varphi_i - A\varphi\| &\leqslant \max_{r_1 \leqslant t \leqslant r_2}\left|\int_{t_0}^t |\boldsymbol{f}(\tau, \varphi_i(\tau)) - \boldsymbol{f}(\tau, \varphi(\tau))|d\tau\right| \\
&\leqslant n^2K(r_2 - r_1)\|\varphi_i - \varphi\|,
\end{aligned}$$

因此函数序列

$$A\varphi_0,\ A\varphi_1,\ \cdots,\ A\varphi_i,\ \cdots$$

在区间 $r_1 \leqslant t \leqslant r_2$ 上一致收敛于函数 $A\varphi$. 对关系式 (31) 取极限, 我们得到:

$$\varphi = A\varphi.$$

由于 $r_1 \leqslant t \leqslant r_2$ 是任意一个包含点 t_0 在自己内部而又被包含在区间 $q_1 < t < q_2$ 内部的区间, 所以序列 (29) 在区间 $q_1 < t < q_2$ 的每一点都收敛, 因此函数 $\varphi(t)$ 在整个区间 $q_1 < t < q_2$ 上有定义, 而且在这个区间上是方程 (30) 的解.

于是定理 3 得证.

利用证明定理 3 的方法, 我们建立如下一条对今后来说是重要的命题:

(E) 我们假设, 给定在区间 $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ 上的连续 (数值) 函数 $u(t)$ 满足积分不等式

$$u(t) \leqslant \int_{t_0}^{t} (\alpha u(\tau) + \beta)d\tau, \quad \alpha > 0,\ \beta > 0; \tag{32}$$

于是可以证明它就满足不等式

$$u(t) \leqslant \frac{\beta}{\alpha}(e^{\alpha(t-t_0)} - 1). \tag{33}$$

为了证明命题 (E), 除了积分不等式 (32) 之外我们还考虑积分方程

$$v(t) = \int_{t_0}^{t} (\alpha v(\tau) + \beta)d\tau, \tag{34}$$

并证明不等式 $u(t) \leqslant v(t)$ 成立. 为此, 我们将用逐次逼近法求解积分方程 (34). 由于 (34) 中的积分表达式关于函数 $v(t)$ 是线性的, 因此近似序列在整个区间 $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ 上一致收敛 (见定理 3 的证明). 当构造近似函数序列时, 我们取函数 $v_0(t) = u(t)$ 作为开始的函数, 然后令

$$v_{i+1}(t) = \int_{t_0}^{t} (\alpha v_i(\tau) + \beta)d\tau. \tag{35}$$

我们对 i 进行归纳法证明: 每个函数 $v_i(t)$ 都满足积分不等式

$$v_i(t) \leqslant \int_{t_0}^{t} (\alpha v_i(\tau) + \beta)d\tau. \tag{36}$$

当 $i = 0$ 时, 这个不等式成立, 因为 $v_0(t) = u(t)$ (见 (32)). 我们假设它对函数 $v_i(t)$ 正确, 并证明它对函数 $v_{i+1}(t)$ 也正确. 根据归纳法假设, 我们有:

$$v_{i+1}(t) = \int_{t_0}^{t} (\alpha v_i(\tau) + \beta)d\tau \geqslant v_i(t).$$

因此

$$v_{i+1}(t) \geqslant v_i(t). \tag{37}$$

于是, 根据数 α 是正的, 我们从 (35) 式得到:

$$v_{i+1}(t) \leqslant \int_{t_0}^{t} (\alpha v_{i+1}(\tau) + \beta) d\tau \, .$$

这就通过归纳法而证明了不等式 (36); 同时还建立了不等式 (37). 由此得出, 序列 $v_0(t) = u(t), v_1(t), \cdots, v_i(t), \cdots$ 的极限 $v(t)$ 不小于函数 $v_i(t)$ 中的任何一个, 特别有 $v(t) \geqslant u(t)$.

现在为了完成命题 (E) 的证明, 只需再证: 积分方程 (34) 的解与不等式 (33) 的右边完全相同. 根据 § 20 的命题 (A), 积分方程 (34) 的解 $v(t)$ 与微分方程

$$\dot{v}(t) = \alpha v(t) + \beta$$

在初始条件 $v(t_0) = 0$ 之下的解完全一样, 也就是不等式 (33) 的右边. 于是命题 (E) 得证.

§22. 不可延拓的解

在 § 3 中曾经引进了不可延拓解的概念 (见 § 3,(A)). 这里利用一个非常简单的想法从定理 2 推出: 每一个解都可以延拓到不可能再进一步延拓的解 (见 (A)). 在这个意义下, 不可延拓解解决了所有解的总和问题. 此外, 命题 (B) 和 (C) 给出了不可延拓解的一个重要性质, 它在本章后面几节中将找到其本身的应用.

令

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}) \tag{1}$$

是标准方程组的向量记法 (见 § 21,(1),(3)), 它的右端函数与其偏导数 $\dfrac{\partial f^i(t, \boldsymbol{x})}{\partial x^j}$ 一起在变量 $t, x^1, \cdots, x^n$ 空间 R 的某个开集 Γ 中有定义且连续.

(A) 1° 方程 (1) 在 Γ 中的任意初始值之下存在不可延拓解.

2° 如果方程 (1) 的某个不可延拓解与方程 (1) 的另外某个解至少在某个 t 值处相同, 那么它也是这个解的不可延拓解.

3° 如果方程 (1) 的两个不可延拓解至少对于一个 t 值相同, 那么它们就完全相同, 亦即它们有同一个定义区间, 且在该区间上处处相等.

命题 (A) 的证明.

令 $(t_0, \boldsymbol{x}_0)$ 为 Γ 中的任意一点. 我们构造方程 (1) 以 $t_0, \boldsymbol{x}_0$ 为初始值的这样的解 $\boldsymbol{x} = \widetilde{\varphi}(t)$, 使得它是方程 (1) 以 $t_0, \boldsymbol{x}_0$ 为初始值的任意一个解的延拓.

方程 (1) 以 $t_0, \boldsymbol{x}_0$ 为初始值的每一个解都对应着它自己的定义区间. 我们用 R_2 记所有这些区间右端点的集合. 而所有它们左端点的集合记为 R_1. 用 m_2 表示集合 R_2 的上确界 (特别, 可以有 $m_2 = +\infty$), 而用 m_1 表示集合 R_1 的下确界 (特别, 可以有 $m_1 = -\infty$). 我们上面构造的以 $t_0, \boldsymbol{x}_0$ 为初始值的解 $\boldsymbol{x} = \widetilde{\varphi}(t)$ 就是定义在区

间 $m_1 < t < m_2$ 上. 令 t^* 是这个区间的任意一点. 为了确定起见, 我们假设 $t_0 \leqslant t^*$. 由于 m_2 是集合 R_2 的上确界, 因此存在方程 (1) 以 $t_0, \boldsymbol{x}_0$ 为初始值的解 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\psi}(t)$, 其定义区间包含了点 t^*, 而且我们认为有 $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(t^*) = \boldsymbol{\psi}(t^*)$. 函数 $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}$ 在点 t^* 处的取值与解 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\psi}(t)$ 的随机选取无关. 实际上, 如果代替解 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\psi}(t)$, 我们选取了以 $t_0, \boldsymbol{x}_0$ 为初始值的解 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\chi}(t)$, 它的定义区间也包含了点 t^*, 那么根据唯一性 (见定理2), 我们有 $\boldsymbol{\psi}(t^*) = \boldsymbol{\chi}(t^*)$. 于是, 函数 $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}$ 在整个区间 $m_1 < t < m_2$ 上唯一确定. 同时它是方程 (1) 以 $t_0, \boldsymbol{x}_0$ 为初始值的解, 因为在区间 $m_1 < t < m_2$ 的每个点 t^* 附近, 按照函数 $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}$ 的构造, 它都与方程 (1) 的某个解相同.

现在令 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\varphi}(t)$ 是方程 (1) 以 $t_0, \boldsymbol{x}_0$ 为初始值、且定义在区间 $r_1 < t < r_2$ 上的某个解. 于是 r_1 就是集合 R_1 的点, r_2 就是 R_2 的点, 而且有 $m_1 \leqslant r_1, r_2 \leqslant m_2$, 亦即区间 $r_1 < t < r_2$ 被包含在区间 $m_1 < t < m_2$ 之中. 由于解 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ 和 $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(t)$ 有同样的初始值, 所以根据定理2, 在它们都有定义的地方, 亦即在区间 $r_1 < t < r_2$ 上, 处处相等; 而这就意味着, 解 $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(t)$ 是解 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ 的延拓.

显然, 所构造的解 $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(t)$ 是不可延拓. 事实上, 设解 $\boldsymbol{\psi}(t)$ 是解 $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(t)$ 的延拓. 于是 $t_0, \boldsymbol{x}_0$ 也可以取作为解 $\boldsymbol{\psi}(t)$ 的初始值, 根据上面的证明, 解 $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(t)$ 是解 $\boldsymbol{\psi}(t)$ 的延拓, 而这就意味着, 解 $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(t)$ 和 $\boldsymbol{\psi}(t)$ 完全一样. 从这些理由得出, $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(t)$ 是以 $t_0, \boldsymbol{x}_0$ 为初始值的唯一不可延拓解.

我们现在假设, 不可延拓解 $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(t)$ 与另外某个解 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ 至少在一个值 t 处相同. 我们用 t_0 来记这个值 t, 并设 $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$. 于是 $t_0, \boldsymbol{x}_0$ 就是不可延拓解 $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(t)$ 的初始值, 也是 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ 的初始值. 根据上面的证明, 解 $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(t)$ 是解 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ 的延拓. 如果解 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ 不可延拓, 那么根据同样的理由, 它就是解 $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(t)$ 的延拓, 从而解 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ 和 $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(t)$ 完全相同.

于是命题 (A) 得证.

(B) 设 E 是空间 R 中被包含在开集 Γ 里的有界闭集, 而 $\boldsymbol{x} = \tilde{\boldsymbol{\varphi}}(t)$ 是方程 (1) 定义在区间 $m_1 < t < m_2$ 上的某个不可延拓解 (见 (A)). 于是存在这样的数 r_1 和 r_2, $m_1 < r_1 < r_2 < m_2$, 使得当 t 不属于区间 $r_1 \leqslant t \leqslant r_2$ 时, 空间 R 的点 $(t, \tilde{\boldsymbol{\varphi}}(t))$ 位于集合 E 之外.

我们只证明存在这样的数 $r_2 < m_2$, 使得当 $r_2 < t < m_2$ 时, 点 $(t, \tilde{\boldsymbol{\varphi}}(t))$ 不属于集合 E. 数 r_1 的存在性可类似地证明. 如果 $m_2 = +\infty$, 那么显然存在数 r_2, 因为当 t 增长到无限大时, 第一个坐标就等于 t 的点 $(t, \tilde{\boldsymbol{\varphi}}(t))$ 当然必定远离集合 E 的边界.

于是我们将认为 $m_2 < +\infty$, 并证明数 r_2 的存在性. 这时我们利用在 §21 命题 (D) 中给出对于数 r 的估计. 我们在空间 R 中引进欧几里得度量. 由于 E 是有界闭集, 而开集 Γ 的余集也是闭集, 因此在集合 E 与集合 Γ 的余集之间的距离 ρ (见 §32, 例题 3) 是正的. 令 E^* 为空间 R 中到集合 E 的距离不超过数量 $\frac{1}{2}\rho$ 的所有点的集合. 于是 E^* 是一个被包含在, Γ 中的有界闭集, 因此方程组 (1) 的右端函数及其对 $x^i, i = 1, \cdots, n$ 的偏导数在集合 E^* 上有定义且连续. 从而对于 E^* 的任一点 $(t, \boldsymbol{x})$,

满足不等式

$$|\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}) \leqslant M, \quad \left|\frac{\partial f^i(t,\boldsymbol{x})}{\partial x^j}\right| \leqslant K, \quad i,j=1,2,\cdots,n, \tag{2}$$

其中M和K为一些正数. 我们选取两个这样的正数q和a, 使得$q^2+a^2<\frac{\varrho^2}{4}$. 如果$(t_0,\boldsymbol{x}_0)$是集合$E$的某一点, 而$\Pi$是满足不等式$|t-t_0|\leqslant q$, $|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|\leqslant a$的所有点$(t,\boldsymbol{x})$的集合, 那么显然集合$\Pi$被包含在$E^*$中, 因此对于集合$\Pi$的所有点$(t,\boldsymbol{x})$都满足不等式(2). 于是, 如果数$r$满足§21中的不等式(16),(19),(22), 那么就存在方程(1)以$t_0,\boldsymbol{x}_0$为初始值且定义在区间$|t-t_0|<r$上的解$\boldsymbol{x}=\varphi(t)$. 这里重要的只在于: 对集合$E$的所有点$(t_0,\boldsymbol{x}_0)$, 找出的都是**同一个**数$r$. 我们来证明, 可以取数$m_2-r$做为$r_2$. 假设相反, 亦即当某个$t_0>m_2-r$时, 点$(t_0,\tilde{\varphi}(t_0))$位于集合$E$中. 于是我们也可以取量$t_0$和$\tilde{\varphi}(t_0)$做为解$\boldsymbol{x}=\tilde{\varphi}(t)$的初始值, 根据上面讲过, 区间$|t-t_0|<r$应当被包含在区间$m_1<t<m_2$之中, 但这与不等式$t_0>m_2-r$矛盾. 于是命题(B)得证.

对于自治方程组有类似于命题(B)的命题(C)成立, 而且后者可直接从前者推出. 设

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \tag{3}$$

为自治方程组的向量记法, 其右端函数与它们对 $x^1,\cdots,x^n$ 的偏导数一起都在变量 $x^1,\cdots,x^n$ 空间 S 的某个开集 Δ 中有定义且连续.

(C) 令F为空间S中整个位于Δ中的有界闭集, 而$\boldsymbol{x}=\tilde{\varphi}(t)$是方程(3)定义在区间$m_1<t<m_2$上的某一个不可延拓解. 如果$m_2<+\infty$, 那么存在着数$r_2$, $m_1<r_2<m_2$, 使得当t属于区间$r_2<t<m_2$时, 点$\tilde{\varphi}(t)$位于集合F的外面. 完全一样地, 如果$m_1>-\infty$, 那么存在数r_1, $m_1<r_1<m_2$, 使得当t属于区间$m_1<t<r_1$时, 点$\tilde{\varphi}(t)$位于集合F的外面.

在证明命题(C)时, 我们将只考虑$m_2\neq+\infty$的情形, 并给出数r_2的存在性. 在所有点$(t,\boldsymbol{x})$的空间R中, 其中$\boldsymbol{x}$是S的点, 我们来确定由所有点$(t,\boldsymbol{x})$组成的开集Γ, 其中t是任意数, 而$\boldsymbol{x}$是集合Δ的点. 其次, 令m为满足条件$m_1<m<m_2$的某个数. 用E记由所有点$(t,\boldsymbol{x})$组成的集合, 其中$m\leqslant t\leqslant m_2$, 而$\boldsymbol{x}$为集合$F$的点. 显然, 集合$E$为有界闭集, 且被包含在$\Gamma$中. 根据命题(B), 存在这样的数$r_2$, 使得当$t$属于区间$r_2<t<m_2$时, 点$(t,\tilde{\varphi}(t))$不属于集合$E$. 显然, 我们可以这样选取数$r_2$, 使得它满足这个条件, 而且还使得$m<r_2$. 于是当$r_2<t<m_2$时满足不等式$m\leqslant t\leqslant m_2$, 从而当$r_2<t<m_2$时点$(t,\tilde{\varphi}(t))$可以不属于集合$E$只是因为点$\tilde{\varphi}(t)$不属于集合$F$. 于是命题(C)得证.

例题

1. 为了说明这一节的结果, 我们考虑一阶的自治方程

$$\dot{x} = \frac{1}{f(x)}, \tag{4}$$

其中 $f(x)$ 是一个多项式, 它所有的根都是简单的实根. 令 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为这些根按增加顺序排列. 方程 (4) 的相空间就是直线 P, 而其开集 Δ 就是直线 P 上除了 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 之外所有点的集合, 因为在这 n 个点处, 方程 (4) 的右端函数变成无穷大. 我们设

$$F(x) = \int_0^x f(\xi)d\xi .$$

于是方程 (4) 所有解的集合可用关系式

$$F(x) = t + c$$

描述. 由于在自治方程中, 时间平移一个常数, 轨线并没有改变, 因此方程 (4) 所有轨线的集合可以用运动的描写来代替, 而点 $x(t)$ 沿轨线的运动用关系式

$$F(x) = t$$

给出. 我们考虑点 $x(t)$ 沿区间 $a_1 < x < a_2$ 的运动. 因为 $f(x)$ 在区间 $a_1 < x < a_2$ 上的符号保持不变, 所以 $F(a_1) \neq F(a_2)$. 为了确定起见, 我们假设

$$m_1 = F(a_1) < m_2 = F(a_2).$$

容易看出, 这时当 t 跑遍区间 $m_1 < t < m_2$ 时, 点 $x(t)$ 就跑遍区间 $a_1 < x < a_2$. 由此看出, $x(t)$ 是其定义区间为 $m_1 < t < m_2$ 的不可延拓解. 在这里, 这个区间的两个端点都是有限的; 这说明当走近时间区间 $m_1 < t < m_2$ 的端点时, 在轨线上运动的点就走近区域 Δ 的边界.

2. 在某种意义下命题 (B) 回答了为什么不可延拓解的定义区间从右边或者从左边是有界的问题. 为了简单起见, 我们限制在当集合 Γ 为有界的情况时来考察不可延拓解 $\boldsymbol{x} = \widetilde{\varphi}(t)$ 的性质. 用 G 记集合 Γ 的边界.

设 $m_1 < t < m_2$ 为不可延拓解 $\boldsymbol{x} = \widetilde{\varphi}(t)$ 的定义区间. 由于集合 Γ 有界, 所以两个数 m_1 和 m_2 都不会是 $\pm\infty$. 我们证明, 当 $t \to m_2$ 时, 点 $(t, \widetilde{\varphi}(t))$ 与集合 G 的距离趋于零. 令 ε 为任意正数, 而 E_ε 为集合 Γ 中到集合 G 的距离大于或者等于 ε 的所有点的集合. 容易证明, 在 R 中集合 E_ε 是一个有界闭集. 根据命题 (B), 存在这样的数 $r_2 < m_2$, 使得当 $r_2 < t < m_2$ 时, 点 $(t, \widetilde{\varphi}(t))$ 不属于集合 E_ε, 从而它到集合 G 的距离小于 ε. 因此, 当 $t \to m_2$ 时, 点 $(t, \widetilde{\varphi}(t))$ 到集合 G 的距离就趋于零. 当 $t \to m_2$ 时, 点 $(t, \widetilde{\varphi}(t))$ 趋向于集合 Γ 的边界 G, 这是因为解 $\boldsymbol{x} = \widetilde{\varphi}(t)$ 不可能延拓到其定义区间端点 m_2 的右边.

§23. 解对初值和参数的连续依赖性

考虑到给定方程组的解对其初始值的依赖性, 我们得出解是自变量和初始值的函数. 这个多变量函数的各种性质有重要的价值. 这里要证明这个函数对全体变量的连续性. 解对初始值连续依赖性的证明将归结为固定初始值时, 解对参数的依赖性定理, 这些参数是连续地进入方程组的右端函数中. 本节要首先证明这个定理.

解对参数的连续依赖性

我们将考虑标准方程组:

$$\dot{x}^i = f^i(t, x^1, \cdots, x^n, \mu^1, \cdots, \mu^l), \quad i = 1, \cdots, n, \tag{1}$$

其右端依赖于参数 $\mu^1, \cdots, \mu^l$ 且在变量 $t, x^1, \cdots, x^n, \mu^1, \cdots, \mu^l$ 空间 $\widetilde{R}$ 的某个开集 $\widetilde{\Gamma}$ 中有定义. 假设方程组 (1) 的右端函数及其对变量 $x^1, \cdots, x^n$ 的偏导数

$$\frac{\partial f^i}{\partial x^j}, \quad i, j = 1, \cdots, n \tag{2}$$

是全体所有变量在 $\widetilde{\Gamma}$ 中的连续函数. 令

$$\boldsymbol{x} = (x^1, \cdots, x^n), \quad \boldsymbol{\mu} = (\mu^1, \cdots, \mu^l),$$

$$\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\mu}) = (f^1(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\mu}), \cdots, f^n(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\mu})),$$

于是我们把方程组 (1) 写成向量形式:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\mu}). \tag{3}$$

(A)　我们将用 $(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\mu})$ 记空间 $\widetilde{R}$ 的点. 固定初始值 $t_0, \boldsymbol{x}_0$, 并用 M 记所有这样 $\boldsymbol{\mu}$ 的集合, 使得点 $(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\mu})$ 属于集合 $\widetilde{\Gamma}$. 显然, M 是变量 $\mu^1, \cdots, \mu^l$ 空间中的**开集**. 集合 M 的每一点 $\boldsymbol{\mu}$ 对应着方程 (3) 的一个以 $t_0, \boldsymbol{x}_0$ 为初始值的不可延拓解 $\varphi(t, \boldsymbol{\mu})$, 它定义在区间 $m_1(\boldsymbol{\mu}) < t < m_2(\boldsymbol{\mu})$ 上 (见 § 22,(A)), 显然, 这个区间可能依赖于 $\boldsymbol{\mu}$, 因此在记号中也表示出来. 所有使得函数 $\varphi(t, \boldsymbol{\mu})$ 有定义的点 $(t, \boldsymbol{\mu})$ 的集合 T 用如下条件来描述: 点 $\boldsymbol{\mu}$ 属于集合 M, 而数 t 这时满足不等式 $m_1(\boldsymbol{\mu}) < t < m_2(\boldsymbol{\mu})$.

定理 13　*令 $\varphi(t, \boldsymbol{\mu})$ 为方程 (3) 当每一个固定 $\boldsymbol{\mu}$ 时以 $t_0, \boldsymbol{x}_0$ 为初始值的不可延拓解, 那么函数 $\varphi(t, \boldsymbol{\mu})$ 有定义的所有点 $(t, \boldsymbol{\mu})$ 的集合 T 是变量 $t, \mu^1, \cdots, \mu^l$ 空间的开集. 而且函数 $\varphi(t, \boldsymbol{\mu})$ 还是变量 $t, \boldsymbol{\mu}$ 在集合 T 上的连续函数.*

应当注意到集合 T 是**开的**这个事实的非平凡性和重要性.

证明　设 $(t^*, \boldsymbol{\mu}^*)$ 为集合 T 的任一点. 我们证明: 充分靠近点 $(t^*, \boldsymbol{\mu}^*)$ 的点 $(t, \boldsymbol{\mu})$ 属于集合 T, 而且差 $\varphi(t, \boldsymbol{\mu}) - \varphi(t^*, \boldsymbol{\mu}^*)$ 很小. 这就是定理所要证明的.

我们首先假设$t^* \geqslant t_0$. 由于解$\varphi(t, \boldsymbol{\mu}^*)$当$t = t^*$时有定义, 因此$t^* < m_2(\boldsymbol{\mu}^*)$, 从而存在这样的数$r_2$, 使得$t^* < r_2 < m_2(\boldsymbol{\mu}^*)$, 于是解$\varphi(t, \boldsymbol{\mu}^*)$特别在整个区间$t_0 \leqslant t \leqslant r_2$上有定义. 当数$t$跑遍区间$t_0 \leqslant t \leqslant r_2$时, 点$(t, \varphi(t, \boldsymbol{\mu}^*), \boldsymbol{\mu}^*)$在空间$\widetilde{R}$中描绘了某一条曲线$Q$. 令$a$和$b$为两个正数. 我们用$\widetilde{\Pi}$表示空间$\widetilde{R}$中满足条件

$$t_0 \leqslant t \leqslant r_2, \quad |\boldsymbol{x} - \varphi(t, \boldsymbol{\mu}^*)| \leqslant a, \quad |\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mu}^*| \leqslant b \tag{4}$$

的所有点$(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\mu})$的集合. 从$Q$是被包含在开集$\widetilde{\Gamma}$中的有界闭集得出: 存在这样的正数$a$和$b$, 使得集合$\widetilde{\Pi}$也被包含在$\widetilde{\Gamma}$中. 下面我们将认为数$a$和$b$总满足这个条件. 由于偏导数(2)连续, 因此它们在集合$\widetilde{\Pi}$上按模有某个常数K的界, 于是根据§21中的不等式(6), 对于集合$\widetilde{\Pi}$的点$(t, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{\mu})$, $(t, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{\mu})$满足关系式

$$|\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{\mu}) - \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{\mu})| \leqslant n^2 K |\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1|. \tag{5}$$

其次, 从函数$\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\mu})$在集合$\widetilde{\Pi}$上的一致连续性 (见§32(I)) 得出: 存在随着正变量ε一起趋于零的正单调函数$\beta_2(\varepsilon)$, 使得对于集合$\widetilde{\Pi}$的点$(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\mu}^*)$和$(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\mu})$满足关系式

$$|\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\mu}) - \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\mu}^*)| < \beta_2(|\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mu}^*|). \tag{6}$$

现在设$\boldsymbol{x} = \varphi(t, \boldsymbol{\mu})$, $|\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mu}^*| \leqslant b$是方程(3)以$(t_0, \boldsymbol{x}_0)$为初始值的解. 根据§22的命题(B), 当$t \to m_2(\boldsymbol{\mu})$时点$(t, \varphi(t, \boldsymbol{\mu}), \boldsymbol{\mu})$应当离开闭集$\widetilde{\Pi}$. 我们用$t_2$记点$(t, \varphi(t, \boldsymbol{\mu}), \boldsymbol{\mu})$第一次到达集合$\widetilde{\Pi}$边界的那个$t$值. 显然, $t_0 < t_2 \leqslant r_2$. 我们来求出差$|\varphi(t, \boldsymbol{\mu}) - \varphi(t, \boldsymbol{\mu}^*)|$在区间$t_0 \leqslant t \leqslant t_2$上的估计. 为此, 我们对参数值$\boldsymbol{\mu}$和$\boldsymbol{\mu}^*$写下方程(3)的积分方程形式 (见§21,(A)), 并从第一个积分关系式减去第二个积分关系式即得

$$\varphi(t, \boldsymbol{\mu}) - \varphi(t, \boldsymbol{\mu}^*) = \int_{t_0}^{t} (\boldsymbol{f}(\tau, \varphi(\tau, \boldsymbol{\mu}), \boldsymbol{\mu}) - \boldsymbol{f}(t, \varphi(\tau, \boldsymbol{\mu}^*), \boldsymbol{\mu}^*)) d\tau, \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_2.$$

估计右边积分号下的差, 我们有

$$|\boldsymbol{f}(\tau, \varphi(\tau, \boldsymbol{\mu}), \boldsymbol{\mu}) - \boldsymbol{f}(\tau, \varphi(\tau, \boldsymbol{\mu}^*), \boldsymbol{\mu}^*)| \leqslant |\boldsymbol{f}(\tau, \varphi(\tau, \boldsymbol{\mu}), \boldsymbol{\mu}) -$$

$$- \boldsymbol{f}(\tau, \varphi(\tau, \boldsymbol{\mu}^*), \boldsymbol{\mu})| + |\boldsymbol{f}(\tau, \varphi(\tau, \boldsymbol{\mu}^*), \boldsymbol{\mu}) - \boldsymbol{f}(\tau, \varphi(\tau, \boldsymbol{\mu}^*), \boldsymbol{\mu}^*)|.$$

根据不等式(5)对右边的第一项进行估计, 而根据不等式(6)对右边的第二项进行估计; 合并这两个估计得到:

$$|\varphi(t, \boldsymbol{\mu}) - \varphi(t, \boldsymbol{\mu}^*)| \leqslant \int_{t_0}^{t} [n^2 K |\varphi(\tau, \boldsymbol{\mu}) - \varphi(\tau, \boldsymbol{\mu}^*)| + \beta_2(|\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mu}^*|)] d\tau.$$

设$u(t) = |\varphi(\tau, \boldsymbol{\mu}) - \varphi(\tau, \boldsymbol{\mu}^*)|$之后, 根据§21的命题(E)我们得到: 当$t_0 \leqslant t \leqslant t_2$时有

$$|\varphi(t, \boldsymbol{\mu}) - \varphi(t, \boldsymbol{\mu}^*)| \leqslant \frac{\beta_2(|\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mu}^*|)}{n^2 K} \left(e^{n^2 K (t - t_0)} - 1 \right)$$

$$\leqslant \frac{\beta_2(|\boldsymbol{\mu}-\boldsymbol{\mu}^*|)}{n^2K}\left(e^{n^2K(r_2-t_0)}-1\right)=c_2\beta_2(|\boldsymbol{\mu}-\boldsymbol{\mu}^*|). \tag{7}$$

令 ρ_2 为满足不等式

$$\rho_2 \leqslant b, \tag{8}$$

$$c_2\beta_2(\rho_2) < a \tag{9}$$

的正数. 下面我们将认为 $\boldsymbol{\mu}$ 满足不等式

$$|\boldsymbol{\mu}-\boldsymbol{\mu}^*| < \rho_2, \tag{10}$$

而且假设 $t_2 = r_2$, 因此解 $\boldsymbol{\varphi}(t,\boldsymbol{\mu})$ 在整个区间 $t_0 \leqslant t \leqslant r_2$ 上有定义.

因为按照假设, 点 $(t_2, \boldsymbol{\varphi}(t_2,\boldsymbol{\mu}), \boldsymbol{\mu})$ 是位于集合 Π 的边界上, 所以对于这个点, 不等式 (4) 中之一应该准确地成为等式. 根据不等式 (8),(10) 我们有 $|\boldsymbol{\mu}-\boldsymbol{\mu}^*| < b$. 其次, 由于不等式 (4), 我们有 $|\boldsymbol{\varphi}(t_2,\boldsymbol{\mu})-\boldsymbol{\varphi}(t_2,\boldsymbol{\mu}^*)| < a$. 最后, 由于 $t_2 > t_0$, 因此从 (4) 的所有不等式中可能转变成等式的只有不等式 $t_2 \leqslant r_2$, 从而我们有 $t_2 = r_2$.

于是这就证明了当 $t^* \geqslant t_0$ 时, 存在着这样的数 $r_2 > t^*$ 和这样的正数 ρ_2, 使得当 $t_0 \leqslant t \leqslant r_2$ 和 $|\boldsymbol{\mu}-\boldsymbol{\mu}^*| < \rho_2$ 时有点 $(t,\boldsymbol{\mu})$ 属于集合 T 且满足不等式 (7).

类似地可以证明, 当 $t^* \leqslant t_0$ 时, 存在着这样的数 $r_1 < t^*$ 和这样的正数 ρ_1, 使得当 $r_1 \leqslant t \leqslant t_0$ 和 $|\boldsymbol{\mu}-\boldsymbol{\mu}^*| < \rho_1$ 时有点 $(t,\boldsymbol{\mu})$ 属于集合 T 且满足类似于不等式 (7) 的不等式

$$|\boldsymbol{\varphi}(t,\boldsymbol{\mu})-\boldsymbol{\varphi}(t,\boldsymbol{\mu}^*)| < c_1\beta_1(|\boldsymbol{\mu}-\boldsymbol{\mu}^*|). \tag{11}$$

从上述的结果得出, 如果点 $(t^*,\boldsymbol{\mu}^*)$ 属于集合 T, 那么无论点 t^* 关于 t_0 的相对位置如何, 总存在这样的正数 r 和 ρ, 使得当

$$|t-t^*| < r, \quad |\boldsymbol{\mu}-\boldsymbol{\mu}^*| < \rho \tag{12}$$

时, 点 $(t,\boldsymbol{\mu})$ 属于集合 T 且有不等式

$$|\boldsymbol{\varphi}(t,\boldsymbol{\mu})-\boldsymbol{\varphi}(t,\boldsymbol{\mu}^*)| < c\beta(|\boldsymbol{\mu}-\boldsymbol{\mu}^*|) \tag{13}$$

成立. 因为满足条件 (12) 的所有点 $(t,\boldsymbol{\mu})$ 的集合就是点 $(t^*,\boldsymbol{\mu}^*)$ 的邻域, 所以 T 是开集. 现在证明函数 $\boldsymbol{\varphi}(t,\boldsymbol{\mu})$ 在点 $(t^*,\boldsymbol{\mu}^*)$ 处连续. 为此, 估计差式 $\boldsymbol{\varphi}(t,\boldsymbol{\mu})-\boldsymbol{\varphi}(t^*,\boldsymbol{\mu}^*)$; 我们有

$$|\boldsymbol{\varphi}(t,\boldsymbol{\mu})-\boldsymbol{\varphi}(t^*,\boldsymbol{\mu}^*)| \leqslant |\boldsymbol{\varphi}(t,\boldsymbol{\mu})-\boldsymbol{\varphi}(t,\boldsymbol{\mu}^*)| + |\boldsymbol{\varphi}(t,\boldsymbol{\mu}^*)-\boldsymbol{\varphi}(t^*,\boldsymbol{\mu}^*)|.$$

当数 $|\boldsymbol{\mu}-\boldsymbol{\mu}^*|$ 很小时, 上式右端的第一项也很小 (见 (13)). 右端的第二项当数 $|t-t^*|$ 很小时也很小, 这是由于函数 $\boldsymbol{\varphi}(t,\boldsymbol{\mu}^*)$ 对变量 t 的连续性. 因此 $\boldsymbol{\varphi}(t,\boldsymbol{\mu})$ 是变量 t, $\boldsymbol{\mu}$ 的连续函数.

于是定理 13 得证.

解对初始值的连续性

我们现在要考察标准方程组:

$$\dot{x}^i = f^i(t, x^1, \cdots, x^n), \quad i = 1, \cdots, n, \tag{14}$$

它的右端函数及其对变量 $x^1, \cdots, x^n$ 的偏导数

$$\frac{\partial f^i}{\partial x^j}, \quad i, j = 1, \cdots, n, \tag{15}$$

在变量 $t, x^1, \cdots, x^n$ 空间 R 的某个开集 Γ 上有定义且连续. 令

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}) \tag{16}$$

为方程组 (14) 的向量记法.

(B) 集合 Γ 的每一点 $(\tau, \boldsymbol{\xi})$ 对应着方程 (16) 以 $t_0 = \tau, \boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{\xi}$ 为初始值的不可延拓解 $\boldsymbol{\varphi}(t, \tau, \boldsymbol{\xi})$, 它定义在依赖于初始值 $\tau, \boldsymbol{\xi}$ 的区间 $m_1(\tau, \boldsymbol{\xi}) < t < m_2(\tau, \boldsymbol{\xi})$ 上 (见 §22, (A)). 变量 $t, \tau, \xi^1, \cdots, \xi^n$ 空间中使得函数 $\boldsymbol{\varphi}(t, \tau, \boldsymbol{\xi})$ 有定义的所有点的集合 S, 显然, 用如下条件来描述: 点 $(\tau, \boldsymbol{\xi})$ 属于集合 Γ, 而数 t 这时满足不等式 $m_1(\tau, \boldsymbol{\xi}) < t < m_2(\tau, \boldsymbol{\xi})$.

定理 14 *令 $\boldsymbol{\varphi}(t, \tau, \boldsymbol{\xi})$ 为方程 (16) 以 $\tau, \boldsymbol{\xi}$ 为初始值的不可延拓解, 那么函数 $\boldsymbol{\varphi}(t, \tau, \boldsymbol{\xi})$ 有定义的所有点 $(t, \tau, \boldsymbol{\xi})$ 的集合 S 是变量 $t, \tau, \xi^1, \cdots, \xi^n$ 空间中的开集. 而且函数 $\boldsymbol{\varphi}(t, \tau, \boldsymbol{\xi})$ 还是 $t, \tau, \boldsymbol{\xi}$ 全体变量在集合 S 上的连续函数.*

在下面命题 (C) 中所叙述的构造把这条定理作为定理 13 的直接推论.

(C) 设 $(\tau, \boldsymbol{\xi})$ 是集合 Γ 的任一点. 代替方程 (16) 中的自变量 t, 我们按照公式

$$t = \tau + s \tag{17}$$

引进新的自变量 s. 代替方程 (16) 中的未知向量函数 $\boldsymbol{x}$, 我们按照公式

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{y} \tag{18}$$

引进新的未知向量函数 $\boldsymbol{y}$. 在新的变量下, 方程 (16) 写成如下形式:

$$\frac{d\boldsymbol{y}}{ds} = \boldsymbol{f}(\tau + s, \boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{y}). \tag{19}$$

由于变量 $t, \boldsymbol{x}$ 的函数 $\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})$ 定义在开集 Γ 上, 因此变量 $s, \boldsymbol{y}, \tau, \boldsymbol{\xi}$ 的函数

$$\boldsymbol{g}(s, \boldsymbol{y}, \tau, \boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{f}(\tau + s, \boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{y}) \tag{20}$$

在点 $(\tau+s, \boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{y})$ 属于集合 Γ 的条件下有定义. 容易看出, 这个条件在变量 $s, \boldsymbol{y}, \tau, \boldsymbol{\xi}$ 空间 $\widetilde{R}$ 中划出某个开集 $\widetilde{\Gamma}$, 而且在这个集合上向量函数 (20) 连续, 其分量对变量 $y^1, \cdots, y^n$ 有连续偏导数. 我们将认为在方程 (19) 中的量 $\tau, \boldsymbol{\xi}$ 是参数, 并设

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{\psi}(s, \tau, \boldsymbol{\xi}) \tag{21}$$

是方程 (19) 以 $s=0, \boldsymbol{y}=\mathbf{0}$ 为固定初始值的不可延拓解 (见 § 22,(A)), 亦即满足初始条件

$$\psi(0,\tau,\boldsymbol{\xi})=\mathbf{0} \tag{22}$$

的解. 按照公式 (17) 和 (18) 回到老变量, 我们得到函数

$$\boldsymbol{x}=\varphi(t,\tau,\boldsymbol{\xi})=\boldsymbol{\xi}+\psi(t-\tau,\tau,\boldsymbol{\xi})\,; \tag{23}$$

经直接验证说明, 这是方程 (16) 满足初始条件

$$\varphi(\tau,\tau,\boldsymbol{\xi})=\boldsymbol{\xi}$$

的解. 从 (21) 是不可延拓解得出, 解 (23) 也是不可延拓的, 因为如果解 (23) 可以延拓, 则解 (21) 也可以延拓.

定理 14 的证明　命题 (C) 把解对初始值的依赖性研究归结为 (当初始值固定时) 解对出现在方程右端的参数依赖性研究. 在定理 13 中已进行过这种研究. 根据这条定理, 右边含有参数 $\tau,\boldsymbol{\xi}$ 的方程 (19) 当固定初始值 $s_0=0, \boldsymbol{y}_0=\mathbf{0}$ 时取得的不可延拓解 $\boldsymbol{y}=\psi(s,\tau,\boldsymbol{\xi})$ 在变量 $s,\tau,\boldsymbol{\xi}$ 空间中的某个开集上有定义, 而且在这个集合上对其全体变量连续. 方程 (16) 以 $\tau,\boldsymbol{\xi}$ 为初始值的不可延拓解 $\boldsymbol{x}=\varphi(t,\tau,\boldsymbol{\xi})$ 通过解 $\boldsymbol{y}=\psi(s,\tau,\boldsymbol{\xi})$ 按照公式 (23) 来表示. 从函数 ψ 的变量 $s,\tau,\boldsymbol{\xi}$ 转变成函数 φ 的变量 $t,\tau,\boldsymbol{\xi}$ 是用公式

$$t=s+\tau,\quad \tau=\tau,\quad \boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{\xi} \tag{24}$$

来实现的. 这个从变量 $s,\tau,\boldsymbol{\xi}$ 空间到变量 $t,\tau,\boldsymbol{\xi}$ 空间的变换是一个仿射变换, 因此它把定义函数 ψ 的开集, T 变成定义函数 φ 的某个开集 S (见 § 32, 例题 1). 于是, 定义函数 φ 的所有点 $(t,\tau,\boldsymbol{\xi})$ 的集合 S 在变量 $t,\tau,\boldsymbol{\xi}$ 空间中是一个开集. 根据转变公式 (23), 函数 φ 的连续性从函数 ψ 的连续性得出. 于是定理 14 得证.

定理 13 和定理 14 可以合并成一条定理:

定理 15　*设 $\boldsymbol{x}=\varphi(t,\tau,\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\mu})$ 是方程 (3) 以 $\tau,\boldsymbol{\xi}$ 为初始值的不可延拓解. 那么函数 $\varphi(t,\tau,\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\mu})$ 在变量 $t,\tau,\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\mu}$ 空间的某个开集上有定义且连续.*

这条定理的证明与定理 14 一样, 也是用变量替换 (17), (18), 而后引用定理 13.

定理 13 和定理 14 的推论

定理 13 和 14 是**整体连续性定理**, 稍微不同于通常的表述. 这里对整体连续性定理 (定理 13 和 14) 所引用的表达方式是新的; 它们本质上不同于至今在数学文献中的表达方式. 下面的命题 (D) 和 (E) 是定理 13 和 14 的直接推论. 这些命题很接近于整体连续性定理的通常表达方式. 但是应当指出, 定理 13 和 14 的表达方式是最完全地包括了有关解对参数和初始值连续依赖性的事实. 实质上, 在定理 13 的证明过程

中已经建立过命题 (D)，但是这里把它从定理 13 本身分离出来，是为了强调其内容的完整性.

(D) 如果方程 (1) 以 $t_0, \boldsymbol{x}_0$ 为初始值当 $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}^*$ 时的解 $\varphi(t, \boldsymbol{\mu})$ 定义在包含 t_0 的区间 $r_1 \leqslant t \leqslant r_2$ 上 (这就意味着区间 $r_1 \leqslant t \leqslant r_2$ 被包含在解 $\varphi(t, \boldsymbol{\mu}^*)$ 的定义区间中)，那么存在这样的正数 ρ，使得当 $|\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mu}^*| \leqslant \rho$ 时，以 $t_0, \boldsymbol{x}_0$ 为初始值的不可延拓解 $\varphi(t, \boldsymbol{\mu})$ 也定义在区间 $r_1 \leqslant t \leqslant r_2$ 上. 而且，对任意正数 ε，总存在这样的正数 $\delta < \rho$ 使得当 $r_1 \leqslant t \leqslant r_2$, $|\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mu}^*| \leqslant \delta$ 时，我们有 $|\varphi(t, \boldsymbol{\mu}) - \varphi(t, \boldsymbol{\mu}^*)| < \varepsilon$.

当证明这个命题时，我们用到定理 13. 由于函数 $\varphi(t, \boldsymbol{\mu})$ 有定义的所有点 $(t, \boldsymbol{\mu})$ 的集合 T 是开的，而点 $(r_1, \boldsymbol{\mu}^*)$ 和 $(r_2, \boldsymbol{\mu}^*)$ 都属于它，所以存在这样小的正数 ρ，使得当 $|\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mu}^*| \leqslant \rho$ 时，点 $(r_1, \boldsymbol{\mu})$ 和 $(r_2, \boldsymbol{\mu})$ 都属于集合 T. 这就意味着，不可延拓解 $\varphi(t, \boldsymbol{\mu})$ 的定义区间包含了整个区间 $r_1 \leqslant t \leqslant r_2$，亦即解 $\varphi(t, \boldsymbol{\mu})$ 定义在这个区间上. 所有满足 $r_1 \leqslant t \leqslant r_2$, $|\boldsymbol{\mu} - \mu^*| \leqslant \rho$ 的点 $(t, \boldsymbol{\mu})$ 的集合 P 是有界闭集且位于 T 中，而函数 $\varphi(t, \boldsymbol{\mu})$ 在 T 上连续，因此它在 P 上一致连续. 由此直接得出命题 (D) 第二部分的正确性.

(E) 如果方程 (16) 以 $t_0, \boldsymbol{\xi}$ 为初始值当 $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{x}_0$ 时的解 $\varphi(t, \boldsymbol{\xi}) = \varphi(t, t_0, \boldsymbol{\xi})$ 在包含 t_0 的区间 $r_1 \leqslant t \leqslant r_2$ 上有定义，那么存在这样的正数 ρ，使得当 $|\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{x}_0| \leqslant \rho$ 时，不可延拓解 $\varphi(t, \boldsymbol{\xi})$ 也定义在区间 $r_1 \leqslant t \leqslant r_2$ 上. 而且，对对任意正数 ε，总存在这样的正数 $\delta < \rho$ 使得当 $r_1 \leqslant t \leqslant r_2$, $|\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{x}_0| < \delta$ 时，我们有

$$|\varphi(t, \boldsymbol{\xi}) - \varphi(t, \boldsymbol{x}_0)| < \varepsilon.$$

从定理 14 分离出命题 (E) 与从定理 13 分离出命题 (D) 完全一样.

§24. 解对初始值和参数的可微性

上一节证明了解对初始值和参数的连续性. 这一节将在某些假设下建立解对初始值和参数的可微性.

同上一节一样，我们首先讨论解对参数的可微性，而后根据得到的结果，借助于 § 23 命题 (C) 给出的构造，证明解对初始值的可微性.

对参数的可微性

像在 § 23 那样，我们也将考虑这样的微分方程组

$$\dot{x}^i = f^i(t, x^1, \cdots, x^n, \mu^1, \cdots, \mu^l), \quad i = 1, \cdots, n, \tag{1}$$

其中右端函数与它们的偏导数 $\dfrac{\partial f^i}{\partial x^j}$ 一起，在变量 $t, x^1, \cdots, x^n, \mu^1, \cdots, \mu^l$ 空间 $\widetilde{R}$ 的某个开集 $\widetilde{\Gamma}$ 有定义且连续. 令

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\mu}) \tag{2}$$

为方程组 (1) 的向量记法.

解对参数 $\mu^1, \cdots, \mu^l$ 可微性的证明将在方程组 (1) 右端函数对这些参数在开集 $\widetilde{\Gamma}$ 中连续可微的假设下进行.

在可微性证明之前我们首先讲述通常称为**阿达马**(Hadamard) 引理的命题 (A).

(A) 设 $g(t^1, \cdots, t^p, u^1, \cdots, u^q)$ 是 $p+q$ 个变量的函数, 它定义在这些变量空间的区域 Δ 中, 而 Δ 关于变量 $u^1, \cdots, u^q$ 是凸的. 令

$$\boldsymbol{t} = (t^1, \cdots, t^p), \quad \boldsymbol{u} = (u^1, \cdots, u^q),$$

我们可以把 g 写成两个向量的函数 $g(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{u})$. 我们将假设在函数本身的整个定义区域内, 函数 $g(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{u})$ 和它的偏导数 $\dfrac{\partial g(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{u})}{\partial u^j}$, $j = 1, \cdots, q$ 是连续的. 于是对于区域 Δ 中任意一对有相同坐标 $\boldsymbol{t}$ 的点 $(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{u}_1), (\boldsymbol{t}, \boldsymbol{u}_2)$, 有关系式

$$g(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{u}_2) - g(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{u}_1) = \sum_{j=1}^{q} h_j(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2)(u_2^j - u_1^j) \tag{3}$$

成立, 其中函数 $h_j(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2)$ 对变量 $\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ 所有提到的值有定义且连续 (特别, 当 $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{u}_2$ 时也是如此), 而且有 $h_j(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) = \dfrac{\partial}{\partial u^j} g(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{u})$.

为了证明命题 (A), 我们令

$$\boldsymbol{w}(s) = \boldsymbol{u}_1 + s(\boldsymbol{u}_2 - \boldsymbol{u}_1), \quad 0 \leqslant s \leqslant 1. \tag{4}$$

于是我们有

$$g(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{u}_2) - g(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{u}_1) = g(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{w}(1)) - g(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{w}(0)) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial s} g(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{w}(s)) ds.$$

我们现在计算导数 $\dfrac{\partial}{\partial s} g(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{w}(s))$, 有

$$\frac{\partial}{\partial s} g(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{w}(s)) = \frac{\partial}{\partial s} g(\boldsymbol{t}, w^1(s), \cdots, w^q(s)) = \sum_{j=1}^{q} \frac{\partial g(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{w}(s))}{\partial w^j} \frac{\partial w^j(s)}{\partial s}.$$

因为根据 (4), 显然有

$$\frac{\partial w^j(s)}{\partial s} = u_2^j - u_1^j, \quad j = 1, \cdots, q,$$

所以再令

$$h_j(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2) = \int_0^1 \frac{\partial g(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{w}(s))}{\partial w^j} ds,$$

我们就得到公式 (3). 由于按照假设, 函数 $\dfrac{\partial g(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{u})}{\partial u^j}$ 连续, 因此函数 $h_j(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2)$ 也连续.

于是命题 (A) 得证.

定理 16 根据定理13，方程(2)当固定初始值$t_0, \boldsymbol{x}_0$时的不可延拓解$\boldsymbol{\varphi}(t,\boldsymbol{\mu}) = (\varphi^1(t,\boldsymbol{\mu}),\cdots,\varphi^n(t,\boldsymbol{\mu}))$在变量$t,\mu^1,\cdots,\mu^l$空间的某个开集$T$上有定义且是它自己所有变量的连续函数. 于是，如果方程组(1)的右端对变量$\mu^1,\cdots,\mu^l$的偏导数在开集$\widetilde{\Gamma}$中有定义且连续，那么偏导数

$$\frac{\partial \varphi^i(t,\boldsymbol{\mu})}{\partial \mu^k}, \quad i=1,\cdots,n, \quad k=1,\cdots,l$$

在整个开集T上有定义且连续. 此外，混合偏导数

$$\frac{\partial^2 \varphi^i(t,\boldsymbol{\mu})}{\partial t \partial \mu^k}, \quad i=1,\cdots,n, \quad k=1,\cdots,l$$

也在整个集合T上有定义、连续且不依赖于求导的顺序.

证明 为了求得导数$\dfrac{\partial \varphi^i}{\partial \mu^k}$，我们计算差$\varphi^i(t,\boldsymbol{\mu}_2)-\varphi^i(t,\boldsymbol{\mu}_1)$. 由于函数$\boldsymbol{\varphi}(t,\boldsymbol{\mu})$满足方程(2)，因此这个差的计算自然连带着差

$$f^i(t,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{\mu}_2) - f^i(t,\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{\mu}_1)$$

的计算. 我们利用阿达马引理来计算后一个差式，这时令

$$\boldsymbol{t}=t, \quad \boldsymbol{u}=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\mu}), \quad g(\boldsymbol{t},\boldsymbol{u})=f^i(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{\mu}).$$

为了使得阿达马引理适用于这种情况，首先用适当方法作出在变量$(\boldsymbol{t},\boldsymbol{u})=(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{\mu})$空间中的开集$\Delta$，它对变量$\boldsymbol{x},\boldsymbol{\mu}$来说是凸的. 这时我们的目的是在集合$T$的任一点$(t^*,\boldsymbol{\mu}^*)$的邻域中，证明导数的存在性和连续性. 现在我们转到开集Δ的构造.

由于解$\boldsymbol{\varphi}(t,\boldsymbol{\mu}^*)$在$t=t^*$有定义，因此存在这样的区间$r_1 \leqslant t \leqslant r_2$，它把数$t_0$和$t^*$包含在它自己的内部(即$r_1<t_0<r_2$, $r_1<t^*<r_2$)，且解$\boldsymbol{\varphi}(t,\boldsymbol{\mu}^*)$在这个区间上有定义. 当$t$跑遍区间$r_1 \leqslant t \leqslant r_2$时，点$(t,\boldsymbol{\varphi}(t,\boldsymbol{\mu}^*),\boldsymbol{\mu}^*)$在开集$\Gamma$中描出了一根连续的曲线. 设$a$和$b$是两个这样的正数，使得满足条件

$$r_1 \leqslant t \leqslant r_2, \quad |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\varphi}(t,\boldsymbol{\mu}^*)| \leqslant a, \quad |\boldsymbol{\mu}-\boldsymbol{\mu}^*| \leqslant b \tag{5}$$

的所有点$(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{\mu})$的集合整个被包含在开集$\Gamma$中. 根据§23的命题(D)，即知存在这样的正数$\rho$，使得$2\rho<b$，且当$|\boldsymbol{\mu}-\boldsymbol{\mu}^*| \leqslant 2\rho$时，解$\boldsymbol{\varphi}(t,\boldsymbol{\mu})$在整个区间$r_1 \leqslant t \leqslant r_2$上有定义，以及在同一个区间上满足不等式$|\boldsymbol{\varphi}(t,\boldsymbol{\mu})-\boldsymbol{\varphi}(t,\boldsymbol{\mu}^*)|<a$. 我们现在确定开集$\Delta$为满足条件

$$r_1 \leqslant t \leqslant r_2, \quad |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\varphi}(t,\boldsymbol{\mu}^*)|<a, \quad |\boldsymbol{\mu}-\boldsymbol{\mu}^*|<2\rho$$

的所有点$(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{\mu})$的集合. 显然，开集$\Delta$对变量$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\mu})$来说是凸的.

为了计算偏导数 $\frac{\partial \varphi^i}{\partial \mu^k}$, 我们以 e_k 记 l 维空间中沿第 k 个坐标轴方向的单位向量. 令 $\boldsymbol{\mu}_1$ 是满足条件 $|\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mu}^*| < \rho$ 的某个向量, 而 τ 是满足条件 $|\tau| < \rho$ 的数. 设 $\boldsymbol{\mu}_2 = \boldsymbol{\mu}_1 + \tau e_k$. 于是两个向量 $\boldsymbol{\mu}_1$ 和 $\boldsymbol{\mu}_2$ 满足条件

$$|\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}^*| < 2\rho, \quad |\boldsymbol{\mu}_2 - \boldsymbol{\mu}^*| < 2\rho.$$

因此在整个区间 $r_1 \leqslant t \leqslant r_2$ 上有不等式

$$|\boldsymbol{\varphi}(t, \boldsymbol{\mu}_1) - \boldsymbol{\varphi}(t, \boldsymbol{\mu}^*)| < a, \quad |\boldsymbol{\varphi}(t, \boldsymbol{\mu}_2) - \boldsymbol{\varphi}(t, \boldsymbol{\mu}^*)| < a$$

成立. 于是当 t 跑遍区间 $r_1 < t < r_2$ 时, 点 $(t, \boldsymbol{\varphi}(t, \boldsymbol{\mu}_1), \boldsymbol{\mu}_1)$ 和 $(t, \boldsymbol{\varphi}(t, \boldsymbol{\mu}_2), \boldsymbol{\mu}_2)$ 描出了整个位于开集 Δ 中的曲线. 应用阿达马引理于差式

$$f^i(t, \boldsymbol{\varphi}(t, \boldsymbol{\mu}_2), \boldsymbol{\mu}_2) - f^i(t, \boldsymbol{\varphi}(t, \boldsymbol{\mu}_1), \boldsymbol{\mu}_1),$$

我们得到

$$\begin{aligned} & f^i(t, \boldsymbol{\varphi}(t, \boldsymbol{\mu}_2), \boldsymbol{\mu}_2) - f^i(t, \boldsymbol{\varphi}(t, \boldsymbol{\mu}_1), \boldsymbol{\mu}_1) \\ = & \sum_{j=1}^{n} h_j^i(t, \boldsymbol{\mu}_1, \tau)(\varphi^j(t, \boldsymbol{\mu}_2) - \varphi^j(t, \boldsymbol{\mu}_1)) + \sum_{k=1}^{l} h_{n+k}^i(t, \boldsymbol{\mu}_1, \tau)(\mu_2^k - \mu_1^k). \end{aligned} \tag{6}$$

其中, 由于阿达马引理, 函数 h_j^i, $j = 1, \cdots, n + l$ 依赖于量 $t, \boldsymbol{\varphi}(t, \boldsymbol{\mu}_1), \boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\varphi}(t, \boldsymbol{\mu}_2), \boldsymbol{\mu}_2$, 从而最终依赖于量 $t, \boldsymbol{\mu}_1, \tau$ (因为 $\boldsymbol{\mu}_2 = \boldsymbol{\mu}_1 + \tau e_k$, 而量 $\boldsymbol{\varphi}(t, \boldsymbol{\mu}_1)$ 和 $\boldsymbol{\varphi}(t, \boldsymbol{\mu}_2)$ 连续依赖于 $t, \boldsymbol{\mu}_1$ 和 $t, \boldsymbol{\mu}_2$; 见定理 13).

为了计算导数 $\frac{\partial \varphi^i}{\partial \mu^k}$, 显然应当先写出差商

$$\psi^i(t, \boldsymbol{\mu}_1, \tau) = \frac{\varphi^i(t, \boldsymbol{\mu}_2) - \varphi^i(t, \boldsymbol{\mu}_1)}{\tau}, \quad \tau \neq 0,$$

而后令 $\tau \to 0$ 对它取极限.

将解 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\varphi}(t, \boldsymbol{\mu}_1)$ 和 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\varphi}(t, \boldsymbol{\mu}_2)$ 代入方程组 (1), 并将得到的第二个关系式减去第一个关系式, 于是根据 (6), 我们得到:

$$\frac{\partial \psi^i(t, \boldsymbol{\mu}_1, \tau)}{\partial t} = \sum_{j=1}^{n} h_j^i(t, \boldsymbol{\mu}_1, \tau)\psi^i(t, \boldsymbol{\mu}_1, \tau) + h_{n+k}^i(t, \boldsymbol{\mu}_1, \tau), \quad i = 1, \cdots, n. \tag{7}$$

这个关系式当

$$r_1 < t < r_2, \quad |\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}^*| < \rho, \quad |\tau| < \rho, \quad \tau \neq 0$$

时是正确的. 因此函数

$$\psi^1(t, \boldsymbol{\mu}_1, \tau), \ \cdots, \ \psi^n(t, \boldsymbol{\mu}_1, \tau) \tag{8}$$

当$\tau \neq 0$时满足线性微分方程组

$$\dot{y}^i = \sum_{j=1}^{n} h_j^i(t, \boldsymbol{\mu}_1, \tau) y^j + h_{n+k}^i(t, \boldsymbol{\mu}_1, \tau) \tag{9}$$

以及初始条件

$$\psi^i(t_0, \boldsymbol{\mu}_1, \tau) = \frac{\varphi^i(t_0, \boldsymbol{\mu}_2) - \varphi^i(t_0, \boldsymbol{\mu}_1)}{\tau} = \frac{x_0^i - x_0^i}{\tau} = 0\,.$$

虽然函数$\psi^i(t, \boldsymbol{\mu}_1, \tau)$, $i = 1, \cdots, n$仅当$\tau \neq 0$时才有定义, 但是方程(9)本身当$\tau = 0$时也有定义, 而且它的右端函数在由不等式

$$r_1 < t < r_2\,, \quad |\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}^*| < \rho\,, \quad |\tau| < \rho \tag{10}$$

描述的开集上有定义且连续. 由于方程组(9)是线性的, 因此根据定理3和定理13, 这个方程组有以$t_0, 0$为初始值的解

$$y^1 = \chi^1(t, \boldsymbol{\mu}_1, \tau), \ \cdots, \ y^n = \chi^i(t, \boldsymbol{\mu}_1, \tau)\,; \tag{11}$$

它们在整个开集(10)上有定义且连续. 根据唯一性定理(定理2), 在整个开集(10)上当$\tau \neq 0$时, 等式

$$\psi^i(t, \boldsymbol{\mu}_1, \tau) = \chi^i(t, \boldsymbol{\mu}_1, \tau)\,, \quad i = 1, \cdots, n$$

是正确的. 但是等式(11)右端在包括$\tau = 0$在内的整个开集(10)上有定义且连续. 因此当$\tau \to 0$时并对等式(11)取极限, 我们得到:

$$\frac{\partial \varphi^i(t, \boldsymbol{\mu}_1)}{\partial \mu_1^k} = \lim_{\tau \to 0} \psi^i(t, \boldsymbol{\mu}_1, \tau) = \lim_{\tau \to 0} \chi^i(t, \boldsymbol{\mu}_1, \tau) = \chi^i(t, \boldsymbol{\mu}_1, 0)\,. \tag{12}$$

由于这个等式的右端函数在开集

$$r_1 < t < r_2\,, \quad |\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}^*| < \rho \tag{13}$$

上有定义且连续, 因此在这整个开集上, 偏导数$\dfrac{\partial \varphi^i(t, \boldsymbol{\mu}_1)}{\partial \mu_1^k}$有定义且连续. 特别它在点$(t^*, \boldsymbol{\mu}^*)$的某个邻域中有定义且连续.

其次, 由于函数$y^i = \chi^i(t, \boldsymbol{\mu}_1, 0)$, $i = 1, \cdots, n$满足当$\tau = 0$时的微分方程组(9), 因此函数

$$y^i = \frac{\partial \varphi^i(t, \boldsymbol{\mu}_1)}{\partial \mu_1^k}\,, \quad i = 1, \cdots, n$$

也满足这个方程组. 于是所有这些函数在开集(13)上都有对t的连续偏导数. 换句话说, 在开集(13)上, 存在连续的混合偏导数

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial}{\partial \mu_1^k} \varphi^i(t, \boldsymbol{\mu}_1)\right]. \tag{14}$$

将显然定义在开集 (13) 上的解 $x^i = \varphi^i(t, \boldsymbol{\mu}_1)$, $i = 1, \cdots, n$ 代入方程组 (1), 我们得到:

$$\frac{\partial \varphi^i(t, \boldsymbol{\mu}_1)}{\partial t} = f^i(t, \boldsymbol{\varphi}(t, \boldsymbol{\mu}_1), \boldsymbol{\mu}_1), \quad i = 1, \cdots, n. \tag{15}$$

因为已经证明函数 $\varphi^j(t, \boldsymbol{\mu}_1)$, $j = 1, \cdots, n$ 在整个开集 (13) 有对 μ_1^k 的连续偏导数, 而方程组 (1) 的右端有对变量 $x^1, \cdots, x^n, \mu^1, \cdots, \mu^l$ 的连续偏导数, 所以关系式 (15) 的右边在整个开集 (13) 上有对 μ_1^k 的连续偏导数. 于是关系式 (15) 的左边在开集 (13) 上也有连续偏导数

$$\frac{\partial}{\partial \mu_1^k}\left(\frac{\partial \varphi^i(t, \boldsymbol{\mu}_1)}{\partial t}\right). \tag{16}$$

总之, 两个偏导数 (14) 和 (16) 都在开集 (13) 上连续, 因此根据分析上的已知定理, 它们在这个集合上彼此一样.

由于点 $(t^*, \boldsymbol{\mu}^*)$ 属于开集 (13), 因此定理 16 的证明就彻底完成了.

对初始值的可微性

我们将考虑与在 §23 一样 (见 §23, 公式 (14)) 的微分方程组

$$\dot{x}^i = f^i(t, x^1 \cdots, x^n), \quad i = 1, \cdots, n, \tag{17}$$

右端函数与其偏导数 $\dfrac{\partial f^i}{\partial x^j}$ 一起在变量 $t, x^1, \cdots, x^n$ 空间 R 的某个开集 Γ 上有定义且连续. 令

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}) \tag{18}$$

为方程组 (17) 的向量记法.

不同于 §23, 我们将假设变量只是未知函数 $\boldsymbol{x}$ 的初始值 $\boldsymbol{\xi}$, 而固定变量 t 的初始值 τ, 并设 $\tau = t_0$. 解对 τ 的可微性下面用不到; 而为了使得它成立, 方程组 (17) 必须满足补充条件 (方程右端函数对 t 的连续可微性).

定理 17 设

$$\boldsymbol{\varphi}(t, t_0, \boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{\varphi}(t, \boldsymbol{\xi}) = (\varphi^1(t, \boldsymbol{\xi}), \cdots, \varphi^n(t, \boldsymbol{\xi}))$$

为方程 (18) 以 $t_0, \boldsymbol{\xi}$ 为初始值的不可延拓解. 由定理 14 直接得出, 函数 $\boldsymbol{\varphi}(t, \boldsymbol{\xi})$ 在变量 $t, \xi^1, \cdots, \xi^n$ 空间中的某个开集 S' 上有定义且连续. 于是, 在整个集合 S' 上偏导数

$$\frac{\partial \varphi^i(t, \boldsymbol{\xi})}{\partial \xi^j}, \quad i, j = 1, \cdots, n$$

存在且连续; 此外, 在这个集合上混合偏导数

$$\frac{\partial^2 \varphi^i(t, \boldsymbol{\xi})}{\partial t \partial \xi^j}, \quad i, j = 1, \cdots, n$$

连续且与求导的顺序无关.

证明 在§23命题(C)中给出的构造, 把这个证明归结为定理16. 由于§23中方程(19)的右端函数有对一切变量 $y^1,\cdots,y^n,\xi^1,\cdots,\xi^n$ 的连续偏导数, 因此根据定理16, 函数 ψ^i (见§23,(C)) 的偏导数

$$\frac{\partial\psi^i(t,t_0,\boldsymbol{\xi})}{\partial\xi^j},\quad i,j=1,\cdots,n$$

在整个开集 S' 上有定义且连续, 以及混合偏导数

$$\frac{\partial^2\psi^i(t,t_0,\boldsymbol{\xi})}{\partial t\partial\xi^j},\quad i,j=1,\cdots,n$$

也在 S' 上连续且与求导的顺序无关. 其次, 因为解 $\boldsymbol{\varphi}(t,\boldsymbol{\xi})=\boldsymbol{\varphi}(t,t_0,\boldsymbol{\xi})$ 是由 $\boldsymbol{\psi}(t,t_0,\boldsymbol{\xi})$ 按照§23 的公式(23)当 $\tau=t_0$ 时来确定的, 所以从求出来函数 $\psi^i(t,t_0,\boldsymbol{\xi})$ 的性质得到在定理17陈述中指出的函数 $\varphi^i(t,\boldsymbol{\xi})$ 对应性质.

定理16和定理17可以合并成一条定理:

定理 18 我们假设, 方程组(1)的右端函数在整个开集 $\widetilde{\Gamma}$ 上有对参数 $\mu^1,\cdots,\mu^l$ 的连续导数. 令

$$\boldsymbol{\varphi}(t,\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\mu})=(\varphi^1(t,\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\mu}),\cdots,\varphi^n(t,\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\mu}))$$

是方程(2)以 $t_0,\boldsymbol{\xi}$ 为初始值的不可延拓解. 于是函数 $\boldsymbol{\varphi}(t,\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\mu})$ 在变量 $t,\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\mu}$ 空间的某个开集 $\widetilde{\Gamma}$ 上有定义且连续. 可以证明, 偏导数

$$\frac{\partial\varphi^i(t,\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\mu})}{\partial\xi^j},\quad \frac{\partial\varphi^i(t,\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\mu})}{\partial\mu^k},\quad i,j=1,\cdots,n,\quad k=1,\cdots,l$$

在整个开集 $\widetilde{\Gamma}$ 上有定义且连续. 此外, 混合导数

$$\frac{\partial^2\varphi^i(t,\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\mu})}{\partial t\partial\xi^j},\quad \frac{\partial^2\varphi^i(t,\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\mu})}{\partial t\partial\mu^k}$$

在整个集合 $\widetilde{\Gamma}$ 上有定义、连续且与求导的顺序无关.

这条定理的证明与定理17一样, 也是用§23的变量替换(17),(18) (当 $\tau=t_0$), 而后引用定理16.

变分方程

有时需要得到方程(2)的解 $\boldsymbol{\varphi}(t,\boldsymbol{\mu})$ 对参数 μ^k 的偏导数当固定参数值 $\boldsymbol{\mu}=\boldsymbol{\mu}^*$ 时的某些结果. 但是, 为此没有必要先找出方程(2)的解 $\boldsymbol{\varphi}(t,\boldsymbol{\mu})$, 然后再把 $\boldsymbol{\mu}$ 看成变量而将解 $\boldsymbol{\varphi}(t,\boldsymbol{\mu})$ 对 μ^k 求偏导; 而是从一些线性微分方程组的讨论中可以得到这些结果. 类似的情况也出现在方程(18)的解 $\boldsymbol{\varphi}(t,\boldsymbol{\xi})$ 对初始值 ξ^j 的偏导数当固定 $\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{x}_0$ 的研究.

(B) 设 $\boldsymbol{\varphi}(t,\boldsymbol{\mu})=(\varphi^1(t,\boldsymbol{\mu}),\cdots,\varphi^n(t,\boldsymbol{\mu}))$ 是方程 (2) 以 $t_0,\boldsymbol{x}_0$ 为初始值的不可延拓解, 并令 $m_1<t<m_2$ 为它当固定参数值 $\boldsymbol{\mu}=\boldsymbol{\mu}^*$ 时的定义区间. 如果方程组 (1) 右边的偏导数 $\dfrac{\partial f^i}{\partial \mu^k}$ 在区域 $\widetilde{\Gamma}$ 中连续, 那么根据定理 16, 当 $\boldsymbol{\mu}=\boldsymbol{\mu}^*$ 时计算出的偏导数

$$\frac{\partial}{\partial \mu^k}\varphi^i(t,\boldsymbol{\mu}^*)=\psi_k^i(t),$$

作为 t 的函数在整个区间 $m_1<t<m_2$ 上有定义且连续. 我们令

$$f_j^i(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{\mu})=\frac{\partial f^i(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{\mu})}{\partial x^j};\quad f_j^i(t)=f_j^i(t,\boldsymbol{\varphi}(t,\boldsymbol{\mu}^*),\boldsymbol{\mu}^*),$$

$$g_k^i(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{\mu})=\frac{\partial f^i(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{\mu})}{\partial \mu^k};\quad g_k^i(t)=g_k^i(t,\boldsymbol{\varphi}(t,\boldsymbol{\mu}^*),\boldsymbol{\mu}^*).$$

根据定理 13, 变量 t 的函数 $f_j^i(t)$ 和 $g_k^i(t)$ 在整个区间 $m_1<t<m_2$ 上有定义且连续. 确定在区间 $m_1<t<m_2$ 上的线性方程组

$$\dot{y}^i=\sum_{j=1}^n f_j^i(t)y^j+g_k^i(t) \tag{19}$$

称为方程组 (1) 当 $\boldsymbol{\mu}=\boldsymbol{\mu}^*$ 时 (对参数) 的**变分方程组**. 于是, 函数组

$$y^1=\psi_k^1(t),\ \cdots,\ y^n=\psi_k^n(t) \tag{20}$$

就是方程组 (19) 在初始条件

$$\psi_k^i(t_0)=0 \tag{21}$$

之下的解组.

为了证明命题 (B), 将解 $\boldsymbol{x}=\varphi(t,\boldsymbol{\mu})$ 代入方程组 (1), 于是我们得到恒等式

$$\frac{\partial \varphi^i(t,\boldsymbol{\mu})}{\partial t}=f^i(t,\boldsymbol{\varphi}(t,\boldsymbol{\mu}),\boldsymbol{\mu}). \tag{22}$$

根据定理 16, 这个恒等式的两边当 $\boldsymbol{\mu}=\boldsymbol{\mu}^*$ 时都有对 μ^k 的偏导数, 它对 t 在整个区间 $m_1<t<m_2$ 上有定义, 而且有

$$\frac{\partial}{\partial \mu^k}\frac{\partial \varphi^i(t,\boldsymbol{\mu})}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \varphi^i(t,\boldsymbol{\mu})}{\partial \mu^k}.$$

当 $\boldsymbol{\mu}=\boldsymbol{\mu}^*$ 时将恒等式 (22) 对 μ^k 求导, 由于上述结果, 我们看出函数组 (20) 构成了方程组 (19) 的解组. 为了得到初始条件 (21), 只需将初始条件

$$\varphi^i(t_0,\boldsymbol{\mu})=x_0^i$$

对 μ^k 求导就可以了. 于是命题 (B) 得证.

(C) 设 $\boldsymbol{\varphi}(t,\boldsymbol{\xi}) = (\varphi^1(t,\boldsymbol{\xi}),\cdots,\varphi^n(t,\boldsymbol{\xi}))$ 是方程 (18) 以 $t_0,\boldsymbol{\xi}$ 为初始值的不可延拓解, 并令 $m_1 < t < m_2$ 为它当固定值 $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{x}_0$ 时的定义区间. 根据定理 17, 当 $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{x}_0$ 时计算出的偏导数

$$\frac{\partial}{\partial \xi^j}\varphi^i(t,\boldsymbol{x}_0) = \psi^i_j(t)\,,$$

作为 t 的函数在整个区间 $m_1 < t < m_2$ 上有定义且连续. 我们令

$$f^i_j(t,\boldsymbol{x}) = \frac{\partial f^i(t,\boldsymbol{x})}{\partial x^j}\,;\quad f^i_j(t) = f^i_j(t,\boldsymbol{\varphi}(t,\boldsymbol{x}_0))\,.$$

变量 t 的函数 $f^i_j(t)$ 在整个区间 $m_1 < t < m_2$ 上有定义且连续. 确定在区间 $m_1 < t < m_2$ 上的线性方程组

$$\dot{y}^i = \sum_{j=1}^{n} f^i_j(t) y^j \tag{23}$$

称为方程组 (17) 当初始值为 $t_0,\boldsymbol{x}_0$ 时 (对初始值) 的**变分方程组**. 于是, 函数组

$$y^1 = \psi^1_j(t),\ \cdots,\ y^n = \psi^n_j(t) \tag{24}$$

就是方程组 (23) 在初始条件

$$\psi^i_j(t_0) = \delta^i_j \tag{25}$$

之下的解组, 其中当 $i \neq j$ 时有 $\delta^i_j = 0$, 而 $\delta^i_i = 1$.

函数组 (24) 构成了线性方程组 (23) 的解组这件事情, 完全与命题 (B) 一样进行证明, 亦即将解 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\varphi}(t,\boldsymbol{\xi})$ 代入方程组 (17), 而后将得到的恒等式对 ξ^j 求导. 初始条件 (25) 从初始条件

$$\varphi^i(t_0,\boldsymbol{\xi}) = \xi^i$$

对 ξ^i 求导得到.

例题

设

$$\dot{x}^i = f^i(x^1,\cdots,x^n) = f^i(\boldsymbol{x})\,,\quad i = 1,\cdots,n\,, \tag{26}$$

是自治微分方程组, 而

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \tag{27}$$

是它的向量记法. 其次设 $\boldsymbol{a} = (a^1,\cdots,a^n)$ 是这个方程组的平衡位置 (见 §15), 因此 $f^i(\boldsymbol{a}) = 0$, 而函数组 $x^1 = a^1,\cdots,x^n = a^n$ 就是方程组 (26) 的解. 方程 (27) 以 $0,\boldsymbol{\xi}$ 为初始值的解记为

$$\boldsymbol{\varphi}(t,\boldsymbol{\xi}) = (\varphi^1(t,\boldsymbol{\xi}),\cdots,\varphi^n(t,\boldsymbol{\xi}))\,.$$

我们利用命题 (C) 计算函数 $\varphi^i(t,\boldsymbol{\xi})$ 对 ξ^j 的导数当 $\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{a}$ 时的函数, 并记为

$$\frac{\partial}{\partial \xi^j}\varphi^i(t,\boldsymbol{a})=\psi_j^i(t). \tag{28}$$

在这种情况下, 函数

$$f_j^i(t)=\frac{\partial f^i(\boldsymbol{a})}{\partial x^j}=a_j^i$$

是常数. 于是变分方程组 (23) 在给定情况下是常系数线性齐次方程组

$$\dot{y}^i=\sum_{j=1}^n a_j^i y^j, \tag{29}$$

而作为方程组 (29) 的解, 导函数 (28) 容易求出, 但这时想要求出作为变量 $\boldsymbol{\xi}$ 的解函数 $\boldsymbol{\varphi}(t,\boldsymbol{\xi})$, 一般来说, 是很困难的.

正像我们在下一章要看到的那样, 变分方程组 (29) 对于方程 (27) 在平衡位置 $\boldsymbol{a}$ 附近解的性质研究起着重要的作用. 但是, 以后方程 (29) 不是作为变分方程组, 而是作为方程组 (26) 在平衡位置 $\boldsymbol{a}$ 附近的线性化而出现. 方程组 (26) 的线性化是用下面方法来实现: 代替未知函数 $x^1,\cdots,x^n$, 用公式

$$x^i=a^i+\delta x^i,\quad i=1,\cdots n \tag{30}$$

引进新的未知函数

$$\delta x^1,\cdots,\delta x^n.$$

在方程组 (26) 中用 (30) 进行变量替换, 并将它的右边展开成新未知函数 $\delta x^1,\cdots,\delta x^n$ 的泰勒 (Taylor) 级数, 我们得到:

$$\frac{d}{dt}\delta x^i=f^i(\boldsymbol{a})+\sum_{j=1}^n\frac{\partial f^i(\boldsymbol{a})}{\partial x^j}\delta x^j+\cdots=\sum_{j=1}^n a_j^i\delta x^j+\cdots, \tag{31}$$

其中没有写出来的项是关于量 δx^i 的二阶小量.

将方程组 (31) 线性化之后, 亦即只保留它的线性项, 我们得到与方程组 (29) 相同的方程组.

§25. 首次积分

这一节将给出有关首次积分的概念并解决一阶线性偏微分方程的边界问题.

首次积分

设

$$\dot{x}^i=f^i(x^1,\cdots,x^n),\quad i=1,\cdots,n \tag{1}$$

是标准自治方程组, 右边函数与其偏导数在变量 $x^1, \cdots, x^n$ 空间的某一开集 Δ 上有定义且连续, 并令

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \tag{2}$$

为这个方程组的向量记法.

(A)设函数

$$u(x^1, \cdots, x^n) = u(\boldsymbol{x})$$

与其偏导数在某个被包含在 Δ 中的开集 G 上有定义且连续. 如果当把其轨线全部位于集合 G 中的方程 (2) 的任意解 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\varphi}(t)$ 代入函数 $u(\boldsymbol{x})$ 时, 我们得到关于 t 为常数的量, 也就是说, 函数 $u(\boldsymbol{\varphi}(t))$ 只与解 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ 的选取有关而与变量 t 无关, 那么就称函数 $u(\boldsymbol{x})$ 为方程组 (1) 的首次积分. 于是, 方程组 (1) 的任何首次积分 $u(\boldsymbol{x})$ 都满足条件

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u(\boldsymbol{x})}{\partial x^i} f^i(\boldsymbol{x}) = 0; \tag{3}$$

反之, 每一个满足条件 (3) 的函数 $u(\boldsymbol{x})$ 都是方程组 (1) 的首次积分.

我们来证明方程组 (1) 的首次积分 $u(\boldsymbol{x})$ 都满足条件 (3). 令 $\boldsymbol{\xi}$ 为集合 G 的任一点, 而 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\varphi}(t, \boldsymbol{\xi})$ 为方程 (2) 以 $0, \boldsymbol{\xi}$ 为初始值的解. 于是我们有

$$0 = \frac{d}{dt} u(\boldsymbol{\varphi}(t, \boldsymbol{\xi}))\Big|_{t=0} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u(\boldsymbol{\xi})}{\partial \xi^i} f^i(\boldsymbol{\xi});$$

因为 $\boldsymbol{\xi}$ 是 G 的任一点, 所以关系式 (3) 在集合 G 上成立.

现在假设函数 $u(\boldsymbol{x})$ 满足关系式 (3), 并令 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\varphi}(t)$ 是其轨线位于 G 中的方程 (2) 任一解. 把 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\varphi}(t)$ 代入函数 $u(\boldsymbol{x})$, 我们得到某个函数

$$v(t) = u(\boldsymbol{\varphi}(t)).$$

把这个函数对 t 求导, 我们得到

$$\frac{dv(t)}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u(\boldsymbol{\varphi}(t))}{\partial x^i} f^i(\boldsymbol{\varphi}(t)) = 0.$$

因此, $u(\boldsymbol{\varphi}(t))$ 与 t 无关.

下面对于方程组 (1) 的首次积分讨论, 将在开集 Δ 内点 $\boldsymbol{a}$ 的某个邻中完全局部地进行, 而点 $\boldsymbol{a}$ 不是方程组 (1) 的平衡位置:

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) \neq 0. \tag{4}$$

(B) 方程组 (1) 定义在点 $\boldsymbol{a}$ (见 (4)) 某个邻域中的首次积分

$$u_1(\boldsymbol{x}), \cdots, u_k(\boldsymbol{x})$$

称为**在点 a 独立**或简单称为**独立的**, 如果函数矩阵

$$\left(\frac{\partial u_i(\boldsymbol{a})}{\partial x^j}\right), \quad i=1,\cdots,k, \quad j=1,\cdots,n$$

的秩为 k. 于是在点 $\boldsymbol{a}$ 的某个邻域中 (见 (4)) 存在方程 (1) 的 $n-1$ 个独立首次积分.

我们来证明这个结论. 由于向量 $\boldsymbol{f}(a)$ 部位零, 因此在它的分量中至少有一个不为零, 我们假设

$$f^n(\boldsymbol{a}) \neq 0.$$

令 $\boldsymbol{\xi} = (\xi^1,\cdots,\xi^{n-1},a^n)$ 是接近于点 $\boldsymbol{a}$ 的点, 而 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\varphi}(t,\boldsymbol{\xi})$ 是方程 (2) 以初始值 $0,\boldsymbol{\xi}$ 为初始值的解. 在坐标形式下, 这个解可以写成形式:

$$x^i = \varphi^i(t,\xi^1,\cdots,\xi^{n-1}), \quad i=1,\cdots,n. \tag{5}$$

我们将把这组关系式看成是关于未知量

$$\xi^1,\cdots,\xi^{n-1},t \tag{6}$$

的方程组. 当 $x^i = a^i, i=1,\cdots,n$, 时, 这个方程组显然有解 $\xi^1 = a^1,\cdots,\xi^{n-1} = a^{n-1}, t=0$, 而且方程组 (5) 的函数行列式在这一点处不为零.

事实上,

$$\varphi^i(0,\xi^1,\cdots,\xi^{n-1}) = \xi^i, \quad i=1,\cdots,n-1,$$
$$\varphi^n(0,\xi^1,\cdots,\xi^{n-1}) = a^n,$$

因此

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\varphi^i(0,a^1,\cdots,a^{n-1})}{\partial\xi^j} = \delta^i_j, \quad i=1,\cdots,n, \quad j=1,\cdots,n-1, \\ \dfrac{\partial\varphi^n(0,a^1,\cdots,a^{n-1})}{\partial t} = f^n(\boldsymbol{a}) \neq 0. \end{cases} \tag{7}$$

由此看出, 使我们感兴趣的函数行列式不为零. 于是存在点 $\boldsymbol{a}$ 的这样邻域 G, 使得当 $\boldsymbol{x}$ 属于 G 时, 方程组 (5) 关于未知量 (6) 可解 (见 § 33), 且这个解可写成形式:

$$\xi^1 = u^1(\boldsymbol{x}), \quad \cdots, \quad \xi^{n-1} = u^{n-1}(\boldsymbol{x}), \quad t = v(\boldsymbol{x}). \tag{8}$$

我们来证明, 出现在这些关系式中的函数

$$u^1(\boldsymbol{x}),\cdots,u^{n-1}(\boldsymbol{x}), \tag{9}$$

是方程组 (1) 的首次积分, 而且在点 $\boldsymbol{a}$ 独立. 方程组 (5) 的函数矩阵已找到了 (见 (7)); 从它的形式容易得出函数矩阵

$$\left(\frac{\partial u^i(\boldsymbol{a})}{\partial x^j}\right), \quad i,j=1,\cdots,n-1$$

是单位矩阵, 因此函数组 (9) 是独立的. 现在证明, 它们是方程组 (1) 的首次积分. 为此只需证明, 当把方程 (2) 的任意解 $\boldsymbol{x} = \varphi(t)$ 代入函数组 (9) 时, 它们变成与 t 无关的量. 因为函数组 (8) 是函数组 (5) 的反函数, 所以函数 (9) 满足恒等式

$$u^i(\boldsymbol{\varphi}(t, \boldsymbol{\xi})) = \xi^i, \quad i = 1, \cdots, n-1 \tag{10}$$

(见 § 33, 例题 1). 于是, 当把解 $\boldsymbol{x} = \varphi(t, \boldsymbol{\xi})$ 代入函数组 (9) 时, 我们得到与 t 无关的量.

现在假设 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\varphi}(t)$ 是方程 (2) 经过邻域 G 中的任一解. 令 $t_0, \boldsymbol{x}_0$ 是它的初始值, 而且 $\boldsymbol{x}_0$ 属于 G. 因为函数组 (5) 当 $\boldsymbol{x} = x_0$ 时是可解的, 所以存在经过点 $\boldsymbol{x}_0$ 的解 $\boldsymbol{x} = \varphi(t, \boldsymbol{\xi}_0)$, 因此解 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ 可以写成形式:

$$\boldsymbol{\varphi}(t) = \boldsymbol{\varphi}(t + c, \boldsymbol{\xi}_0),$$

其中 c 为常数 (见 § 15,(B)). 因此, 当把 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\varphi}(t)$ 代入函数 $u^i(\boldsymbol{x})$ 时, 根据 (10) 我们得到

$$u^i(\boldsymbol{\varphi}(t)) = u^i(\boldsymbol{\varphi}(t + c, \boldsymbol{\xi}_0)) = \xi_0^i, \quad i = 1, \cdots, n-1.$$

因此命题 (B) 得证.

(C) 设

$$u^1(\boldsymbol{x}), \cdots, u^{n-1}(\boldsymbol{x}) \tag{11}$$

是方程组 (1) 在点 $\boldsymbol{a}$ 独立的首次积分, 而且

$$u^i(\boldsymbol{a}) = b^i, \quad i = 1, \cdots, n-1, \quad \boldsymbol{b} = (b^1, \cdots, b^{n-1}),$$

并设 $w(\boldsymbol{x})$ 为方程组 (1) 定义在点 $\boldsymbol{a}$ 邻域中的某个首次积分. 那么存在这样的函数 $W(y^1, \cdots, y^{n-1})$, 它定义在变量 $y^1, \cdots, y^{n-1}$ 空间点 $\boldsymbol{b}$ 的某邻域上, 使得恒等式

$$w(\boldsymbol{x}) = W(u^1(\boldsymbol{x}), \cdots, u^{n-1}(\boldsymbol{x})) \tag{12}$$

在点 $\boldsymbol{a}$ 的某个邻域上成立.

我们证明这个命题. 根据 (A), 首次积分 $u^1(\boldsymbol{x}), \cdots, u^{n-1}(\boldsymbol{x}), w(\boldsymbol{x})$ 满足关系式

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u^j(\boldsymbol{x})}{\partial x^i} f^i(\boldsymbol{x}) = 0, \quad j = 1, \cdots, n-1;$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial w(\boldsymbol{x})}{\partial x^i} f^i(\boldsymbol{x}) = 0.$$

因此这些首次积分就不是独立的 (见 (4)). 同时, 首次积分 (11) 是独立的. 根据分析上的已知定理 (见§33, 例 2), 由此得出存在满足关系式 (12) 的函数 W.

如果我们知道方程组 (1) 的一些首次积分, 那么就可以减轻方程组 (1) 的求解工作. 下面的命题确切地讲述了这种情况.

(D) 设

$$u^{k+1}(\boldsymbol{x}), \cdots, u^n(\boldsymbol{x}) \tag{13}$$

是自治方程组 (1) 在点 $\boldsymbol{a}$ 独立 (见 (B)) 的一组 $n-k$ 个首次积分. 利用函数组 (13) 可以把方程组 (1) 降低 $n-k$ 阶, 也就是把它变成 k 阶的自治系统; 特别, 当有最大数目 $n-1$ 个独立的首次积分时, 自治系统 (1) 可以化为一阶方程式, 因此可以通过求积来对它进行求解 (见 § 2,(B)).

我们来证明命题 (D). 因为首次积分 (13) 是独立的, 所以在函数矩阵

$$\left(\frac{\partial u^i(\boldsymbol{a})}{\partial x^j}\right), \quad i = k+1, \cdots, n, \quad j = 1, \cdots, n$$

中存在其行列式不等于零的 $n-k$ 阶子方阵. 为确定起见, 假设矩阵

$$\left(\frac{\partial u^i(\boldsymbol{a})}{\partial x^j}\right), \quad i, j = k+1, \cdots, n$$

的行列式不为零. 利用这个假设, 我们在点 $\boldsymbol{a}$ 的邻域中引进新坐标

$$y^1, \cdots, y^n \tag{14}$$

来代替原来的坐标

$$x^1, \cdots, x^n,$$

并令

$$y^1 = x^1, \cdots, y^k = x^k; \quad y^{k+1} = u^{k+1}(\boldsymbol{x}), \cdots, y^n = u^n(\boldsymbol{x}). \tag{15}$$

通过这些公式确实引进了新坐标 $y^1, \cdots, y^n$, 因为关系式组 (15) 的函数行列式在点 $\boldsymbol{a}$ 的邻域不为零 (见 § 33). 在新的变量组 (14) 之下, 方程组 (1) 取如下形式:

$$\dot{y}^i = g^i(y^1, \cdots, y^n), \quad i = 1, \cdots, n. \tag{16}$$

但是由于 (13) 中的每个函数都满足条件 (3), 所以当 $i = k+1, \cdots, n$ 时, 我们有

$$\dot{y}^i = \frac{d}{dt} u^i(x^1, \cdots, x^n) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u^i(\boldsymbol{x})}{\partial x^j} f^j(\boldsymbol{x}) = 0.$$

这样一来,

$$g^{k+1}(\boldsymbol{y}) = 0, \quad \cdots, \quad g^n(\boldsymbol{y}) = 0.$$

因此, 方程组 (16) 实际上是 k 阶的自治方程组.

一阶线性偏微分方程

关系式 (3) 可以看成是关于未知函数 $u(\boldsymbol{x})$ 的**偏微分方程**, 其自变量为 $x^1, \cdots, x^n$. 在命题 (B) 和 (C) 中建立了当 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) \neq 0$ 时, 这个方程在点 $\boldsymbol{a}$ 的邻域中存在 $n-1$ 个独立解, 而且在有了这 $n-1$ 个独立解之后, 借助于公式 (12) 可以得到任何其他的解. 这时, 显然用公式 (12) 给出的一切函数都是方程 (3) 的解. 在这种意义下可以认为方程 (3) 已解出来了; 这就说明了如果我们会解方程组 (1), 那么也就会解方程 (3). 但是也可以从另外的观点来求解方程 (3), 也就是可以对方程 (3) 或者甚至比 (3) 更一般的方程提出并解决**边值问题**.

(E) 假设

$$\sum_{i=1}^{n} f^i(\boldsymbol{x}) \frac{\partial u}{\partial x^i} = F(\boldsymbol{x}, u) \tag{17}$$

是关于未知函数 $u(\boldsymbol{x})$ 偏微分方程, 其中 $F(\boldsymbol{x}, u)$ 是某个给定的函数, 它有对其所有变量的连续一阶偏导数. 其次, 设

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\xi}(t^1, \cdots, t^{n-1}) \tag{18}$$

是在向量形式下给出的某个 $n-1$ 维曲面的参数记法, 它当 $t^1 = \cdots = t^{n-1} = 0$ 时经过点 $\boldsymbol{a}$ 的, 因而

$$\boldsymbol{\xi}(0, \cdots, 0) = \boldsymbol{a}.$$

我们将假设, 曲面 (18) 是可微的, 且在点 $\boldsymbol{a}$ 处不与向量 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$ 相切, 也就是向量组

$$\frac{\partial \boldsymbol{\xi}(0, \cdots, 0)}{\partial t^1}, \cdots, \frac{\partial \boldsymbol{\xi}(0, \cdots, 0)}{\partial t^{n-1}}, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) \tag{19}$$

线性无关. 最后设

$$u_0(t^1, \cdots, t^{n-1}) \tag{20}$$

为给定在曲面 (18) 上的某个函数. 可以证明, 在点 $\boldsymbol{a}$ 的邻域中存在方程 (17) 的唯一解 $u(\boldsymbol{x})$, 它在曲面 (18) 上与给定的函数 (20) 相同, 因此

$$u(\boldsymbol{\xi}(t^1, \cdots, t^{n-1})) = u_0(t^1, \cdots, t^{n-1}).$$

为了求出解 $u(\boldsymbol{x})$, 利用方程组 (1) 从曲面 (18) 上出发的轨线. 这些轨线称为方程 (17) 的**特征线**.

我们来证明命题 (E). 为此, 我们在方程组 (1) 相空间点 $\boldsymbol{a}$ 的邻域中引进新坐标来代替坐标 $x^1, \cdots, x^n$. 设 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\varphi}(t, t^1, \cdots, t^{n-1})$ 是方程 (2) 从曲面 (18) 上的点 $\boldsymbol{\xi}(t^1, \cdots, t^{n-1})$ 出发的解, 也就是以 $0, \boldsymbol{\xi}(t^1, \cdots, t^{n-1})$ 为初始值的解.

于是我们有一组关系式

$$x^i = \varphi^i(t, t^1, \cdots, t^{n-1}), \quad i = 1, \cdots, n, \tag{21}$$

它们的右端有对变量 $t, t^1, \cdots, t^{n-1}$ 的连续偏导数 (见定理 17). 如果把其中的变量

$$t, t^1, \cdots, t^{n-1} \tag{22}$$

看成未知量, 那么这个方程组当 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}$ 时有明显解

$$t = t^1 = \cdots = t^{n-1} = 0,$$

并且它的函数行列式在这一点处不为零, 这也可以从向量组 (19) 的线性无关性得出. 实际上, $\boldsymbol{\varphi}(0, t^1, \cdots, t^{n-1}) = \boldsymbol{\xi}(t^1, \cdots, t^{n-1})$, 因此偏导数 $\dfrac{\partial}{\partial t^k}\boldsymbol{\varphi}(0, \cdots, 0)$ 等于 $\dfrac{\partial}{\partial t^k}\boldsymbol{\xi}(0, \cdots, 0)$; 此外, $\dfrac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{\varphi}(0, \cdots, 0) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$. 因此, 关系式组 (21) 给出在点 $\boldsymbol{a}$ 的某个邻域中引进新坐标 (22) 来代替坐标 $x^1, \cdots, x^n$ 的可能性 (见 § 33). 在这些新坐标下, 方程 (17) 写出来特别简单, 并且可以很容易解决命题 (E) 中所提出的边值问题. 令 $u(\boldsymbol{x})$ 为定义在点 $\boldsymbol{a}$ 邻域中的某个函数. 将其中的变量 $x^1, \cdots, x^n$ 按照公式 (21) 用变量 (22) 来代替; 于是我们得到函数

$$v(t, t^1, \cdots, t^{n-1}) = u(\boldsymbol{\varphi}(t, t^1, \cdots, t^{n-1})).$$

由此可得

$$\frac{\partial v(t, t^1, \cdots, t^{n-1})}{\partial t} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u(\boldsymbol{x})}{\partial x^i} f^i(\boldsymbol{x}),$$

其中 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\varphi}(t, t^1, \cdots, t^{n-1})$. 因此, 在变量 (22) 之下, 方程 (17) 取得形式:

$$\frac{\partial v(t, t^1, \cdots, t^{n-1})}{\partial t} = F(\boldsymbol{\varphi}(t, t^1, \cdots, t^{n-1}), v(t, t^1, \cdots, t^{n-1})). \tag{23}$$

因为曲面 (18) 在坐标 (22) 之下由方程 $t = 0$ 给出, 所以我们应当求出方程 (23) 的解, 它当 $t = 0$ 时变成为给定的函数 $u_0(t^1, \cdots, t^{n-1})$. 为了找出这样的解, 应当求解方程 (23); 把 (23) 看成是自变量 t 的常微分方程, 而变量 $t^1, \cdots, t^{n-1}$ 看成为参数. 这时应当寻找以

$$0, u_0(t^1, \cdots, t^{n-1})$$

为初始值的解. 根据定理 18, 得到的函数 $v(t, t^1, \cdots, t^{n-1})$ 对所有变量有连续导数.

于是命题 (E) 中提出的边值问题就解决了.

注　设

$$\dot{x}^i = f^i(t, x^1, \cdots, x^n) \tag{24}$$

是非自治的微分方程组. 为了能对这个方程组引入首次积分的概念, 我们在引进了附加未知函数

$$x^{n+1} = t$$

之后, 就把它变成了自治方程组. 于是用方程

$$\dot{x}^{n+1} = 1$$

补充后的方程组 (24) 就是自治的; 它的首次积分就认为是方程组 (24) 的首次积分.

例题

设

$$H = H(x^1, \cdots, x^n; y^1, \cdots, y^n) = H(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$$

是两组变量的函数. 常微分方程组

$$\dot{x}^i = \frac{\partial}{\partial y^i} H(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}), \quad \dot{y}^i = -\frac{\partial}{\partial x^i} H(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}), \quad i = 1, \cdots, n, \tag{26}$$

称为**哈密顿** (Hamilton) **系统**, 而函数 $H(x, y)$ 是这个系统的哈密顿函数. 直接验证即知函数 (25) 是系统 (26) 的首次积分.

第五章　稳定性

许多机械、电子以及其他类型设备 (机器、仪器等) 的工作是用常微分方程组来描述的. 常微分方程组总有无穷多个解的解集, 而为了给出一个确定的解, 需要指出它的初始值. 然而在实际中使用的设备通常都是工作在完全确定的状态, 而且在设备的工作中, 骤然看来, 在任何情形下都不可能出现有对应于方程组各种解的无穷多个工作状态. 这可以那样来说明, 即或者在启动设备时就以某一确定的方式选择了解的初始值, 或者仪器持续工作后初始值的影响消失了, 而设备的工作稳定在**定常解**上. 后面一种情况我们在讨论电路时已经遇到过. 我们再引进一个例子: 挂钟的摆动. 不论钟摆在启动时与垂直位置偏离大小, 钟摆的摆动是完全确定的. 如果钟摆启动时偏离不很大, 那么经过几次摆动之后它就会停止下来. 如果偏离充分大, 那么经过短暂的时间之后, 摆的振幅将成为完全确定的, 而挂钟将以这个振幅一直走下去. 因此, 描写挂钟工作的微分方程组有两个定常解: 对应于挂钟处于不动状态的平衡位置, 以及对应于挂钟在正常运转的周期解. 而这个方程组的任何其他解, 这些解无疑是无穷多的, 很快地趋于这两个定常解中的一个, 且在不长的时间之后, 它们实际上就变得没有差别. 在某种意义下, 所指出的两个定常解中的每一个都是**稳定的**. 这就意味着, 如果我们选取的不是定常解, 而是在开始时与定常解偏差不太大的解, 那么所选取的非定常解就趋于定常解. 这就是解的稳定性定义不十分确切的说法. 从这个例子还看出, 描写挂钟工作的方程组, 其相空间分成两个**吸引区域**. 如果初始值取在其中的一个区域, 那么解将趋于平衡位置; 而如果初始值取在另一个区域, 那么解就要趋于周期解.

从上述例子看出, 为了彻底了解任何设备的工作, 最好找到关于描写这个设备工作的微分方程组相空间好的表达式. 这时重要的是知道这个方程组的所有**稳定解**.

从解对初始值的连续依赖性定理 (见 § 23) 我们已经知道, 如果给定了**有限的**时间区间, 那么当初始值的偏差充分小时, 解的偏差在整个给定的时间区间上也是很小的, 但是解的这个性质绝不意味着稳定性. 至于说到稳定性, 只要初始值的偏差是很小, 那么解的偏差在无限长的时间区间上也必须很小.

本章基本上就讲述平衡位置和周期解的稳定性问题.

本章还包含了两个对于技术问题的重要应用, 即讲述了维什涅格拉德斯基 (Вышнеградский) 关于安装有瓦特调节器的蒸汽机工作研究以及安德罗诺夫 (Андронов) 关于不衰减电振动的电子管振荡器工作研究. 其中第一个是自动调节理论的基础性工作, 而第二个是非线性振动理论的奠基性研究.

在 § 30 中介绍了二阶自治方程组平衡位置附近轨线性态的研究, 它不完全是有关稳定性问题. 这一节就其难度来说, 稍微超过了本书的平均水平. 还有本章的最后一节 (§ 31), 就其内容来说是更难的.

§26. 李雅普诺夫定理

本节将给出李雅普诺夫稳定性概念以及应用到自治方程组 (§ 15) 平衡位置稳定性的充分条件.

平衡位置的稳定性

设

$$\dot{x}^i = f^i(x^1, x^2, \cdots, x^n), \quad i = 1, 2, \cdots, n \tag{1}$$

是标准的自治方程组, 而

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \tag{2}$$

是它的向量记法. 关于函数

$$f^i(x^1, x^2, \cdots, x^n), \quad i = 1, 2, \cdots, n, \tag{3}$$

我们将假设它们在变量 $x^1, \cdots, x^n$ 空间中的某一开集 Δ 上有定义且有连续的一阶偏导数. 在下面建立稳定性判据时, 将加强对它们的可微性要求: 即假设函数 (3) 在集合 Δ 上有连续的二阶偏导数.

在没有正式给出李雅普诺夫稳定性的定义之前, 首先尽力说明一下稳定性的思想. 如果方程 (2) 的一切解当 $t = 0$ 时从充分靠近 $\boldsymbol{a}$ 的点出发, 以后 (即 $t > 0$ 时) 就永远保持靠近点 $\boldsymbol{a}$, 那么就应当认为方程 (2) 的平衡位置 $\boldsymbol{a} = (a^1, \cdots, a^n)$ 是稳定的. 稳定性的物理意义是显然的. 用方程 (2) 来描述其运动的物体 (例如, 某一台机器), 仅当平衡位置 $\boldsymbol{a}$ 是稳定的时候, 才能处于平衡位置 $\boldsymbol{a}$ 的状态, 否则由于随机的扰动所引起与平衡位置的微小偏差就可以招致物体远离平衡位置.

下面用 $\varphi(t,\boldsymbol{\xi})$ 表示方程 (2) 以 $t=0, \boldsymbol{x}=\boldsymbol{\xi}$ 为初始值的解, 因此, $\varphi(t,\boldsymbol{\xi})$ 是数值变量 t 及向量变量 $\boldsymbol{\xi}$ 且满足条件

$$\varphi(0,\boldsymbol{\xi})=\boldsymbol{\xi} \tag{4}$$

的向量函数.

定义 方程 (2) 的平衡位置 $\boldsymbol{a}$ 称为**李雅普诺夫稳定的**, 如果 (a) 存在如此小的正数 ρ, 使得当 $|\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{a}|<\rho$ 时方程 (2) 的解 $\varphi(t,\boldsymbol{\xi})$ 对所有正的 t 值都有定义; (b) 对于任何正数 ε, 总有这样的正数 $\delta<\rho$, 使得当 $|\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{a}|<\delta$ 时有 $|\varphi(t,\boldsymbol{\xi})-\boldsymbol{a}|<\varepsilon$ 对所有 $t>0$ 成立. 方程 (2) 的李雅普诺夫稳定平衡位置 $\boldsymbol{a}$ 称为**渐近稳定的**, 如果 (c) 存在这样的正数 $\sigma<\rho$, 使得当 $|\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{a}|<\sigma$ 时有

$$\lim_{t\to+\infty}|\varphi(t,\boldsymbol{\xi})-\boldsymbol{a}|=0.$$

我们首先给出常系数线性齐次方程组平衡位置的稳定性充分条件.

(A) 设

$$\dot{\boldsymbol{x}}=A\boldsymbol{x} \tag{5}$$

是向量记法下的常系数线性齐次方程组. 它的以 $0,\boldsymbol{\xi}$ 为初始值的解记为 $\psi(t,\boldsymbol{\xi})$. 如果矩阵 A 的所有特征值都有负实部, 则存在这样的正数 α 和 r, 使得满足不等式

$$|\psi(t,\boldsymbol{\xi})|\leqslant r|\boldsymbol{\xi}|\exp(-\alpha t),\quad t\geqslant 0. \tag{6}$$

从不等式 (6) 直接得出, 方程 (5) 的平衡位置 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 是李雅普诺夫稳定的, 而且是渐近稳定的.

我们来证明不等式 (6). 我们令

$$A=(a^i_j);\quad L(p)=(a^i_j-p\delta^i_j).$$

于是利用微分符号 p (见 § 7), 可将在数量形式下的方程 (5) 写为方程组

$$\sum_{j=1}^n L^i_j(p)x^j=0,\quad i=1,2,\cdots,n. \tag{7}$$

设 $M^i_j(p)$ 是矩阵 $L(p)$ 中元素 $L^i_j(p)$ 的代数余子式, 因此满足恒等式

$$\sum_{i=1}^n M^k_i(p)L^i_j(p)=\delta^k_j D(p),$$

这里 $D(p)$ 是矩阵 $L(p)$ 的行列式. 用多项式 $M^k_i(p)$ 乘关系式 (7), 而后将所得到的关系式两边对 i 求和, 即得

$$0=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n M^k_i(p)L^i_j(p)x^j=\sum_{j=1}^n\delta^k_j D(p)x^j=D(p)x^k.$$

于是, 如果

$$\boldsymbol{x}=(x^1,x^2,\cdots,x^n)$$

是方程 (5) 的某一个解, 那么每一函数 x^i 都满足微分方程

$$D(p)x^i=0\,.$$

因为根据假设, 多项式 $D(p)$ 所有的根都有负实部, 所以 (见 § 9,(A)) 函数 x^i 满足不等式

$$|x^i|\leqslant R\exp(-\alpha t)\,,\quad i=1,2,\cdots,n\,,\quad t\geqslant 0\,,$$

其中 R 和 α 是与 i 无关的正数. 从这个不等式得到不等式

$$|\boldsymbol{x}|\leqslant \sqrt{n}R\exp(-\alpha t)\,,\quad t\geqslant 0\,.$$

最后这个不等式在更一般的假设下早已证明过 (见 § 11,(B)) ; 这里重新进行证明.

令 $\boldsymbol{e}_i$ 为第 i 个坐标的单位向量, 因此

$$\boldsymbol{e}_i=(0,\cdots,1,\cdots,0)\,,$$

这里 1 是在第 i 个位置. 其次再令 $\boldsymbol{\psi}_i(t)$ 为方程 (5) 以 $\boldsymbol{e}_i$ 为初始值的解, 因此

$$\boldsymbol{\psi}_i(0)=\boldsymbol{e}_i\,,\quad i=1,2,\cdots,n\,.$$

于是方程 (5) 以

$$\boldsymbol{\xi}=(\xi^1,\cdots,\xi^n)$$

为初始值的解 $\boldsymbol{\psi}(t,\boldsymbol{\xi})$ 显然可以写成形式:

$$\boldsymbol{\psi}(t,\boldsymbol{\xi})=\sum_{i=1}^{n}\xi^i\boldsymbol{\psi}_i(t)\,. \tag{8}$$

因为对于每一解 $\boldsymbol{\psi}_i(t)$ 满足不等式

$$|\boldsymbol{\psi}_i(t)|\leqslant \sqrt{n}R\exp(-\alpha t),\quad t\geqslant 0\,,$$

所以解 $\boldsymbol{\psi}(t,\boldsymbol{\xi})$ 显然满足不等式 (6) .

平衡位置 $\boldsymbol{x}=0$ 的李雅普诺夫稳定性直接从不等式 (6) 得到. 事实上, 如果 ε 是给定的正数, 那么只要取 ε/r 为 δ 就可以了. 渐近稳定性也从不等式 (6) 推出.

李雅普诺夫函数

在建立**非线性**方程组 (1) 平衡位置的稳定性判据时, 利用了所谓**基于方程组的导数**; 它不仅是在李雅普诺夫定理的证明时有用.

(B) 令

$$F(x^1, \cdots, x^n) = F(\boldsymbol{x})$$

是某一个变量 $x^1, \cdots, x^n$ 定义在开集 Δ 上的可微函数. 它在点 $\boldsymbol{x} = (x^1, \cdots, x^n)$ 处基于方程 (1) 对 t 的导数是用如下方法定义: 令 $\varphi(t)$ 是方程 (2) 在某一个 $t = t_0$ 的值时满足初始条件:

$$\varphi(t_0) = \boldsymbol{x}.$$

的解. 基于方程组 (1) 的导数

$$\dot{F}_{(1)}(\boldsymbol{x})$$

用公式

$$\dot{F}_{(1)}(\boldsymbol{x}) = \frac{d}{dt}F(\varphi(t))\bigg|_{t=t_0}$$

来定义, 或者根据全导数的公式有

$$\dot{F}_{(1)}(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F(\boldsymbol{x})}{\partial x^i} f^i(\boldsymbol{x}). \tag{9}$$

从公式 (9) 看出, 导数 $\dot{F}_{(1)}(\boldsymbol{x})$ 与解 $\varphi(t)$ 无关, 而由点 $\boldsymbol{x}$ 的选取所唯一地确定.

现在来证明自治方程组的一个性质.

(C) 我们仍然用 $\varphi(t, \boldsymbol{\xi})$ 记自治方程 (2) 以 $0, \boldsymbol{\xi}$ 为初始值的解. 于是, 函数 $\varphi(t, \boldsymbol{\xi})$ 满足等式

$$\varphi(t, \varphi(s, \boldsymbol{\xi})) = \varphi(s + t, \boldsymbol{\xi}). \tag{10}$$

我们来证明公式 (10). 令

$$\boldsymbol{\eta} = \varphi(s, \boldsymbol{\xi}), \tag{11}$$

这里 s 是固定的数, 我们考虑方程 (2) 的解

$$\varphi_1(t) = \varphi(t, \boldsymbol{\eta}).$$

因为 $\varphi(t, \boldsymbol{\xi})$ 是方程 (2) 的解, 所以根据这个方程的自治性 (见 § 15,(A)), 由关系式

$$\varphi_2(t) = \varphi(s + t, \boldsymbol{\xi})$$

确定的函数 $\varphi_2(t)$ 也是方程的解. 于是我们有方程 (2) 的两个解 $\varphi_1(t)$ 和 $\varphi_2(t)$. 其次, 由 (4) 式有

$$\varphi_1(0) = \varphi(0, \boldsymbol{\eta}) = \boldsymbol{\eta},$$

而由 (11) 可得

$$\varphi_2(0) = \varphi(s, \boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{\eta}.$$

因此解 $\varphi_1(t)$ 和 $\varphi_2(t)$ 有相同的初始值, 所以是一样的, 这就是说关系式 (10) 成立.

在李雅普诺夫定理的证明中, 称之为**李雅普诺夫函数**的某种正定二次型函数起了主要作用. 我们先给正定二次型函数的某些性质 (见 (D)), 然后再来构造李雅普诺夫函数本身 (见 (E)).

(D) 令

$$\boldsymbol{x} = (x^1, \cdots, x^n) \tag{12}$$

是为 n 维空间的向量变量. 由公式

$$W(\boldsymbol{x}) = \sum_{i,j=1}^{n} w_{ij} x^i x^j$$

确定的函数 $W(\boldsymbol{x})$ 称为向量 $\boldsymbol{x}$ 的**二次型**, 这里的 $w_{ij} = w_{ji}$ 是实数. 如果当 $\boldsymbol{x} \neq 0$ 时有

$$W(\boldsymbol{x}) > 0,$$

那么二次型 $W(\boldsymbol{x})$ 就称为**正定的**. 可以证明, 对于任何正定的二次型 $W(\boldsymbol{x})$, 总可以找到两个这样的正常数 μ, ν, 使得对于任何向量 $\boldsymbol{x}$ 都有不等式

$$\mu|\boldsymbol{x}|^2 \leqslant W(\boldsymbol{x}) \leqslant \nu|\boldsymbol{x}|^2 \tag{13}$$

成立. 由此得出, 对于任何 $\boldsymbol{x}$ (见 (12)) 有不等式

$$|x^i| \leqslant \sqrt{\frac{1}{\mu} W(\boldsymbol{x})} \tag{14}$$

成立.

我们来证明数 μ 和 ν 的存在性. 为此, 我们考虑当 $\boldsymbol{\xi}$ 在单位球面上变动时, 亦即满足条件

$$|\boldsymbol{\xi}| = 1 \tag{15}$$

时函数 $W(\boldsymbol{\xi})$ 值的估计. 因为球面 (15) 是有界闭集, 而函数 $W(\boldsymbol{\xi})$ 是连续的, 所以在球面 (15) 上它达到最小值 μ 和最大值 ν. 由于球面 (15) 上所有的向量都不为零向量, 所以数 μ 和 ν 都是正的. 令 $\boldsymbol{x}$ 为任意向量; 于是我们有 $\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{\xi}$, 这里向量 $\boldsymbol{\xi}$ 属于球面 (15), 因此对于向量 $\boldsymbol{\xi}$ 满足有不等式

$$\mu \leqslant W(\boldsymbol{\xi}) \leqslant \nu.$$

用 λ^2 乘这不等式两边就得到不等式 (13).

现在转到李雅普诺夫函数的构造.

(E) 设

$$\dot{x}^i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j^i x^j, \quad i = 1, \cdots, n \tag{16}$$

为常系数的线性齐次方程组, 而且矩阵 $A = (\alpha_j^i)$ 的所有特征值都有负实部. 于是存在正定二次型 $W(\boldsymbol{x})$, 它基于方程组 (16) 的导数 (见 (B)) 满足不等式

$$\dot{W}_{(16)}(\boldsymbol{x}) \leqslant -\beta W(\boldsymbol{x}), \tag{17}$$

这里 $\boldsymbol{x}$ 为任意向量, β 是与向量 $\boldsymbol{x}$ 无关的正数.

我们来构造二次型 $W(\boldsymbol{x})$. 我们认为方程组 (16) 是向量方程 (5) 的数量写法. 如同在命题 (A) 中一样, 把方程 (5) 以 $0, \boldsymbol{\xi}$ 为初始值的解记为 $\boldsymbol{\psi}(t, \boldsymbol{\xi})$; 于是我们有 (见 (8))

$$\boldsymbol{\psi}(t, \boldsymbol{\xi}) = \sum_{i=1}^{n} \xi^i \boldsymbol{\psi}_i(t). \tag{18}$$

现在令

$$W(\boldsymbol{\xi}) = \int_0^{+\infty} |\boldsymbol{\psi}(\tau, \boldsymbol{\xi})|^2 d\tau. \tag{19}$$

根据 (18), 我们有

$$W(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{i,j=1}^{n} \xi^i \xi^j \int_0^{+\infty} (\boldsymbol{\psi}_i(\tau), \boldsymbol{\psi}_j(\tau)) d\tau. \tag{20}$$

因为每一个函数 $\boldsymbol{\psi}_i(t)$ 都满足不等式 (6), 所以在 (20) 右端的每一反常积分都是收敛的, 因此 $W(\boldsymbol{\xi})$ 是一个关于向量 $\boldsymbol{\xi}$ 的二次型. 这个二次型是正定的, 因为当 $\boldsymbol{\xi} \neq 0$ 时, 公式 (19) 中的积分表达式是正的, 所以 $W(\boldsymbol{\xi}) > 0$. 现在计算函数 $W(\boldsymbol{\xi})$ 基于方程组 (16) 的导数 $\dot{W}_{(16)}(\boldsymbol{\xi})$. 为此, 根据命题 (B), 我们引进过点 $\boldsymbol{\xi}$ 的解 $\boldsymbol{\psi}(t, \boldsymbol{\xi})$, 并由此计算函数 $W(\boldsymbol{\psi}(t, \boldsymbol{\xi}))$ 当 $t = 0$ 时的导数. 在前面 (C) 中我们看到

$$\boldsymbol{\psi}(\tau, \boldsymbol{\psi}(t, \boldsymbol{\xi})) = \boldsymbol{\psi}(\tau + t, \boldsymbol{\xi}),$$

所以

$$W(\boldsymbol{\psi}(t, \boldsymbol{\xi})) = \int_0^{\infty} |\boldsymbol{\psi}(\tau, \boldsymbol{\psi}(t, \boldsymbol{\xi}))|^2 d\tau = \int_0^{\infty} |\boldsymbol{\psi}(t + \tau, \boldsymbol{\xi})|^2 d\tau = \int_t^{\infty} |\boldsymbol{\psi}(\tau, \boldsymbol{\xi})|^2 \, d\tau.$$

因此我们有

$$\dot{W}_{(16)}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{d}{dt} W(\boldsymbol{\psi}(t, \boldsymbol{\xi}))\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} \int_t^{\infty} |\boldsymbol{\psi}(\tau, \boldsymbol{\xi})|^2 d\tau\Big|_{t=0} = -|\boldsymbol{\psi}(t, \boldsymbol{\xi})|^2|_{t=0} = -|\boldsymbol{\xi}|^2.$$

于是, 我们得到等式

$$\dot{W}_{(16)}(\boldsymbol{\xi}) = -|\boldsymbol{\xi}|^2,$$

但是根据 (13) 中的第二个不等式有

$$-|\boldsymbol{\xi}|^2 \leqslant -\frac{1}{\nu}W(\boldsymbol{\xi}),$$

所以得到

$$\dot{W}_{(16)}(\boldsymbol{\xi}) \leqslant -\frac{1}{\nu}W(\boldsymbol{\xi}).$$

因此不等式 (17) 得证.

李雅普诺夫定理

最后转到李雅普诺夫定理的叙述和证明. 设

$$\boldsymbol{a} = (a^1, \cdots, a^n)$$

是自治系统 (1) 的平衡位置. 令

$$x^i = a^i + \Delta x^i, \quad i = 1, \cdots, n, \tag{21}$$

并取量

$$\Delta x^1, \Delta x^2, \cdots, \Delta x^n \tag{22}$$

作为新的未知函数. 把 (21) 代入方程组 (1) 之后, 将其右端对变量 (22) 用泰勒公式进行展开, 我们得到

$$\Delta \dot{x}^i = f^i(\boldsymbol{a}) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f^i(\boldsymbol{a})}{\partial x^j}\Delta x^i + R^i, \quad i = 1, \cdots, n, \tag{23}$$

这里 R^i 是关于未知量 (22) 的二阶无穷小量. 因为 $\boldsymbol{a}$ 是方程组 (1) 的平衡位置, 所以

$$f^i(\boldsymbol{a}) = 0;$$

其次, 令

$$a^i_j = \frac{\partial f^i(\boldsymbol{a})}{\partial x^j}, \tag{24}$$

我们可以把 (23) 写成形式:

$$\Delta \dot{x}^i = \sum_{j=1}^{n} a^i_j \Delta x^i + R^i, \quad i = 1, \cdots, n. \tag{25}$$

定理 19 如果矩阵 $A = (a^i_j)$ (见 (24)) 的所有特征值都有负实部, 那么方程组 (1) 的平衡位置 $\boldsymbol{a}$ 是渐近稳定的; 更仔细地说, 存在这样小的正数 σ, 使得当 $|\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{a}| < \sigma$ 时, 有不等式

$$|\boldsymbol{\varphi}(t, \boldsymbol{\xi}) - \boldsymbol{a}| \leqslant r|\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{a}|e^{-\alpha t} \tag{26}$$

成立, 这里 r 和 α 都是与 $\boldsymbol{\xi}$ 无关的正数.

证明 我们将认为方程组 (1) 的平衡位置 $\boldsymbol{a}$ 就是坐标原点, 即 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$. 因为通过坐标系的平行移动总可以做到这一点; 这时矩阵 A 并不改变. 令 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 之后, 我们有

$$\Delta x^i = x^i\,,$$

因此方程组 (25) 写成形式:

$$\dot{x}^i=\sum_{j=1}^{n} a^i_j x^j + R^i,\quad i=1,\cdots,n\,, \tag{27}$$

其中

$$R^i=\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n}\frac{\partial^2 f^i(\theta\boldsymbol{x})}{\partial x^j\partial x^k}x^j x^k\,.$$

将方程组 (27) 线性化, 即丢掉余项 R^i, 即得到线性方程组

$$\dot{x}^i=\sum_{j=1}^{n} a^i_j x^j\,,\quad i=1,\cdots,n. \tag{28}$$

现在令 $W(\boldsymbol{x})$ 为线性方程组 (28) 的李雅普诺夫函数 (见 (E)). 计算函数 $W(\boldsymbol{x})$ 基于方程组 (27) 的导数 $\dot{W}_{(27)}(\boldsymbol{x})$. 我们有

$$\begin{aligned}\dot{W}_{(27)}(\boldsymbol{x})&=\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial W(\boldsymbol{x})}{\partial x^i}a^i_j x^j+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial W(\boldsymbol{x})}{\partial x^i}R^i\\&=\dot{W}_{(28)}(\boldsymbol{x})+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial W(\boldsymbol{x})}{\partial x^i}R^i\,.\end{aligned}$$

由于函数 $W(\boldsymbol{x})$ 满足不等式 (17), 所以我们有

$$\dot{W}_{(27)}(\boldsymbol{x})\leqslant-\beta W(\boldsymbol{x})+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial W(\boldsymbol{x})}{\partial x^i}R^i\,.$$

我们现在选取充分小的正数 b, 使得当

$$W(\boldsymbol{x})\leqslant b \tag{29}$$

时, 向量 $\boldsymbol{x}$ 属于集合 Δ (根据 (13) 式, 这样的 b 是存在的). 由于二阶导数 $\dfrac{\partial^2 f^i(\theta\boldsymbol{x})}{\partial x^j\partial x^k}$ 是连续函数, 因此它在椭球 (29) 中是有界的, 所以在这椭球中有

$$|R^i|\leqslant k|\boldsymbol{x}|^2\leqslant\frac{k}{\mu}W(\boldsymbol{x})\,,$$

其中 k 为某一常数. 其次, 因为 $\dfrac{\partial W(\boldsymbol{x})}{\partial x^i}$ 是关于 $x^1,\cdots,x^n$ 的线性型, 所以

$$\left|\frac{\partial W(\boldsymbol{x})}{\partial x^i}\right|\leqslant l\sqrt{W(\boldsymbol{x})}\,,$$

这里l是某一常数 (见 (14)). 于是, 存在这样的常数q, 使得当$W(\boldsymbol{x}) \leqslant b$时我们有:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial W(\boldsymbol{x})}{\partial x^i} R^i \leqslant q W(\boldsymbol{x})^{\frac{3}{2}} .$$

现在用这样的方法来选择正数c, 使得

$$c \leqslant b, \quad q\sqrt{c} \leqslant \frac{\beta}{2} .$$

于是只要满足不等式

$$W(\boldsymbol{x}) \leqslant c, \tag{30}$$

我们就有

$$\dot{W}_{(27)}(\boldsymbol{x}) \leqslant -\frac{\beta}{2} W(\boldsymbol{x}) .$$

令$\alpha = \dfrac{\beta}{4}$, 就得到不等式

$$\dot{W}_{(27)}(\boldsymbol{x}) \leqslant -2\alpha W(\boldsymbol{x}) ,$$

这个不等式是正确的, 只要$\boldsymbol{x}$满足不等式 (30).

令$\boldsymbol{\xi}$为椭球 (30) 的内点, 即满足不等式

$$W(\boldsymbol{\xi}) < c \tag{31}$$

的点. 与前面一样, 用$\varphi(t, \boldsymbol{\xi})$记方程组 (27) 以$0, \boldsymbol{\xi}$为初始值的解, 并且令

$$w(t) = W(\varphi(t, \boldsymbol{\xi})) .$$

函数$w(t)$对于使得解$\varphi(t, \boldsymbol{\xi})$有定义的所有$t \geqslant 0$的值都有定义, 而且根据命题 (B), 它还满足条件

$$\dot{w}(t) \leqslant -2\alpha w(t), \tag{32}$$

只要它满足不等式

$$w(t) \leqslant c. \tag{33}$$

如果解$\varphi(t, \boldsymbol{\xi})$不是对所有正的$t$值都存在, 那么点$\boldsymbol{x} = \varphi(t, \boldsymbol{\xi})$当$t$增加时必定离开椭球 (30) (见 §24,(B)). 假设点$\boldsymbol{x} = \varphi(t, \boldsymbol{\xi})$离开了这个椭球, 并令$t' > 0$是它第一次到达椭球边界的$t$值. 于是, 在区间$0 \leqslant t \leqslant t'$上, 点 $\varphi(t, \boldsymbol{\xi})$属于椭球 (30), 因此不等式 (32) 成立, 所以$\dot{w}(t)$是非正的. 从而$c = w(t') \leqslant w(0) < c$, 这是矛盾.

于是函数$\varphi(t, \boldsymbol{\xi})$, 以及还有函数$w(t)$都对所有正$t$值都有定义, 而且满足不等式 (32). 如果$\boldsymbol{\xi} \neq 0$, 那么$w(t) > 0$, 而且从不等式 (32) 出发可进行如下的计算:

$$\frac{\dot{w}(t)}{w(t)} \leqslant -2\alpha ; \quad \int_0^t \frac{\dot{w}(t)}{w(t)} dt \leqslant -2\alpha t \quad \text{当} \quad t \geqslant 0 ;$$

$$\ln w(t) - \ln(0) \leqslant -2\alpha t.$$

最后的不等式给出

$$W(\varphi(t,\boldsymbol{\xi})) \leqslant W(\boldsymbol{\xi})e^{-2\alpha t}.$$

由此不等式, 并利用不等式 (13), 我们得到

$$|\varphi(t,\boldsymbol{\xi})|^2 \leqslant \frac{\nu}{\mu}|\boldsymbol{\xi}|^2 e^{-2\alpha t}, \quad t \geqslant 0, \tag{34}$$

而且只要 $\boldsymbol{\xi}$ 满足不等式 (31), 不等式 (34) 就成立.

根据 (13) 式中的第二个不等式, 从关系式

$$|\boldsymbol{\xi}| < \sigma = \sqrt{\frac{c}{\nu}} \tag{35}$$

得出不等式 (31). 于是, 如果满足不等式 (35), 那么不等式 (34) 就正确. 因此把 (34) 开平方之后, 就得到不等式

$$|\varphi(t,\boldsymbol{\xi})| \leqslant \sqrt{\frac{\nu}{\mu}}|\boldsymbol{\xi}|e^{-\alpha t}, \quad t \geqslant 0,$$

它与不等式 (26) 完全一样, 只要取 $r = \sqrt{\frac{\nu}{\mu}}$, 而 $\boldsymbol{a} = 0$. 于是定理 19 得证.

下面的命题 (F) 在某种意义下描述了与定理 19 中所考虑的正好相反的情形.

(F)　方程 (2) 的平衡位置 $\boldsymbol{a}$ 称为**完全不稳定的**, 如果存在这样的正数 σ, 使得方程 (2) 以球 $|\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{a}| < \sigma$ 中的点 $\boldsymbol{\xi} \neq \boldsymbol{a}$ 为初始值的一切解 $\varphi(t,\boldsymbol{\xi})$ 必定离开这个球而不再回来, 也就是可以找到这样的正数 $T = T(\boldsymbol{\xi})$, 使得当 $t = T$ 时解 $\varphi(t,\boldsymbol{\xi})$ 有定义, 而对于所有 $t > T$ 的值, 只要 $\varphi(t,\boldsymbol{\xi})$ 有定义, 它就满足不等式 $|\varphi(t,\boldsymbol{\xi}) - \boldsymbol{a}| \geqslant \sigma$. 于是可以证明, 如果矩阵 $\left(\frac{\partial f^i(\boldsymbol{a})}{\partial x^j}\right)$ 的所有特征值都有正实部, 那么方程 (2) 的平衡位置 $\boldsymbol{a}$ 就是完全不稳定的.

为了证明命题 (F), 我们利用在证明定理 19 的过程中所建立的某些结果; 这时, 和以前一样, 我们将认为 $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$. 对于方程 (2) 按照假设, 矩阵 $\left(\frac{\partial f^i(\boldsymbol{a})}{\partial x^j}\right)$ 的所有特征值都有正实部, 除了方程 (2) 之外, 我们还考虑方程

$$\dot{\boldsymbol{x}} = -\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \tag{36}$$

显然对于这个方程, 点 $\boldsymbol{0}$ 满足定理 19 的条件. 按照在证明定理 19 时给出的构造, 对于方程 (36) 来说, 在条件 (30) 之下, 存在满足不等式

$$\dot{W}_{(36)}(\boldsymbol{x}) \leqslant -2\alpha W(\boldsymbol{x})$$

的李雅普诺夫函数 $W(\boldsymbol{x})$. 把这个不等式的左边用明显的形式写出来 (见 (9)), 就得到

$$\dot{W}_{(36)}(\boldsymbol{x})=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial W(\boldsymbol{x})}{\partial x^i}(-f^i(\boldsymbol{x}))\leqslant -2\alpha W(\boldsymbol{x})$$

或者换一个形式写成

$$\dot{W}_{(1)}(\boldsymbol{x})\geqslant 2\alpha W(\boldsymbol{x}).$$

当满足不等式 (30) 时, 这个不等式显然是正确的. 现在设 $\boldsymbol{\xi}$ 为椭球 (30) 的某一个内点 (见 (31)). 令

$$w(t)=W(\boldsymbol{\varphi}(t,\boldsymbol{\xi})).$$

对于函数 $w(t)$, 当不等式

$$w(t)\leqslant c$$

成立时, 它满足不等式

$$\dot{w}(t)\geqslant 2\alpha w(t). \tag{37}$$

由于 $\boldsymbol{\xi}\neq 0$, 所以 $w(t)>0$, 而且从不等式 (37) 可作下面的计算:

$$\frac{\dot{w}(t)}{w(t)}\geqslant 2\alpha;\quad \int_0^t\frac{\dot{w}(t)}{w(t)}dt\geqslant 2\alpha t\quad 当\ t\geqslant 0;$$

$$w(t)\geqslant w(0)e^{2\alpha t};\quad W(\boldsymbol{\varphi}(t,\boldsymbol{\xi}))\geqslant W(\boldsymbol{\xi})e^{2\alpha t}.$$

从最后的不等式得出, 当 t 增大时, 点 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\varphi}(t,\boldsymbol{\xi})$ 必定走出椭球 (30) 的边界, 因而离开椭球的内部. 我们来证明, 以后它不返回到椭球 (30) 的内部. 假设相反; 于是就可以找到这样正的 t' 值, 使得 $w(t')=c$, 而对于一切充分小的正值 Δt, 满足不等式 $w(t'+\Delta t)<c$. 从最后两个关系式得出 $\dot{w}(t')\leqslant 0$, 而这与不等式 (37) 矛盾; 由于当 $t=t'$ 时 $w(t')=c$, 所以 (37) 式是正确的.

因此, 这就证明了当 $\boldsymbol{\xi}\neq 0$ 位在椭球 (30) 中时, 轨线 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\varphi}(t,\boldsymbol{\xi})$ 必定离开椭球 (30), 且永远不再回来. 根据 (13) 式中的第二不等式, 从不等式 (35) 推出不等式 (31), 因此球 (35) 被包含在椭球 (30) 的内部. 从上面的证明得出命题 (F) 的正确性.

例题

作为对命题 (A) 的补充, 我们来证明: 如果矩阵 A 有正实部的特征值 λ, 那么方程 (5) 的平衡位置 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 是李雅普诺夫不稳定的. 事实上, 根据 §14 的命题 (A), 向量函数 $\boldsymbol{x}=c\boldsymbol{h}e^{\lambda t}$ 是方程 (5) 的解, 这里 c 是任意的实常数, 而 $\boldsymbol{h}$ 是矩阵 A 对应于特征值 λ 的特征向量. 如果 λ 是实数, 那么当 c 充分小时, 所说的解开始在任意靠近平衡位置 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的点 $c\boldsymbol{h}$, 但 $\boldsymbol{x}=c\boldsymbol{h}e^{\lambda t}$ 将按范数逐渐无限增大. 如果 λ 是复数, 那么方程 (5) 的解 $c(\boldsymbol{h}e^{\lambda t}+\overline{\boldsymbol{h}}e^{\overline{\lambda}t})$ 也具有同样的性质.

§27. 离心调速器 (维什涅格拉德斯基的研究)

在近代技术中, 由于大量运用自动控制仪器, **自动调节理论**有特别重要的作用. 在设计自动调节器时, 产生的最重要问题之一是关于机器 - 调节器系统**工作的稳定性**问题. 这问题在许多情况下可以用李雅普诺夫定理 (见§26) 来解决.

最早的自动调节系统是蒸汽机系统 —— 瓦特离心调速器. 离心调速器在 18 世纪末和 19世纪前半期就其担任的任务来说是完全成功的, 到了 19 世纪中叶, 由于其结构上的变化, 它就变得不可靠了. 许多理论家和工程师们都在寻找摆脱所产生危机的出路. 著名的俄国工程师、自动调节理论的奠基人维什涅格拉德斯基十分明确而简单地解决了问题. 维什涅格拉德斯基的论文《论直接作用调节器》(1876年) 开创了针对工业实际问题的机器调节理论. 本节将简要地讲解维什涅格拉德斯基的研究.

离心调速器 (图 41) 是一根可以绕自己垂直轴心旋转的垂直枢轴 S, 它的上端用铰链与两根同样长度的杆 L_1 和 L_2 相连接, L_1 和 L_2 的下端带有同样的球形重物, 杆 L_1 和 L_2 又与辅助杆用铰链连接. 所以它们与垂直方向有同样的偏角 φ, 且位于与垂直枢轴 S 构成的同一垂直平面内. 当杆 L_1 和 L_2 与垂直方向有偏角 φ 时, 它们通过铰链带动了套在枢轴 S 上的特制套管 M, 因此套管到枢轴 S 顶端的距离与 $\cos\varphi$ 成正比. 我们取杆 L_1 和 L_2 的长度作为单位长度, 而连接于各杆端点重物的质量记为 m. 如果枢轴 S 的旋转角速度为 θ, 而杆 L_1 和 L_2 与垂直方向的偏角为 φ, 那么作用在每一重物上的离心力是

$$m\theta^2 \sin\varphi. \tag{1}$$

同时还有大小等于

$$mg \tag{2}$$

的重力作用在每一重物上. 因为作用在重物上的沿杆 L_i 轴线方向的力是与 L_i 的反作用力相平衡的, 所以为了计算作用在重物上的力, 应该把上述的两个力沿两个方向进行分解, 第一是杆的轴线向下的方向, 第二是与杆轴线垂直且朝角 φ 增大的方向. 直接看出 (见图 42), 力 (1) 沿角 φ 增加方向的分力等于

$$m\theta^2 \sin\varphi\cos\varphi, \tag{3}$$

而重力 (2) 沿同一方向的分力等于

$$-mg\sin\varphi. \tag{4}$$

因此, 力 (3) 和 (4) 的合力为

$$m\theta^2 \sin\varphi\cos\varphi - mg\sin\varphi. \tag{5}$$

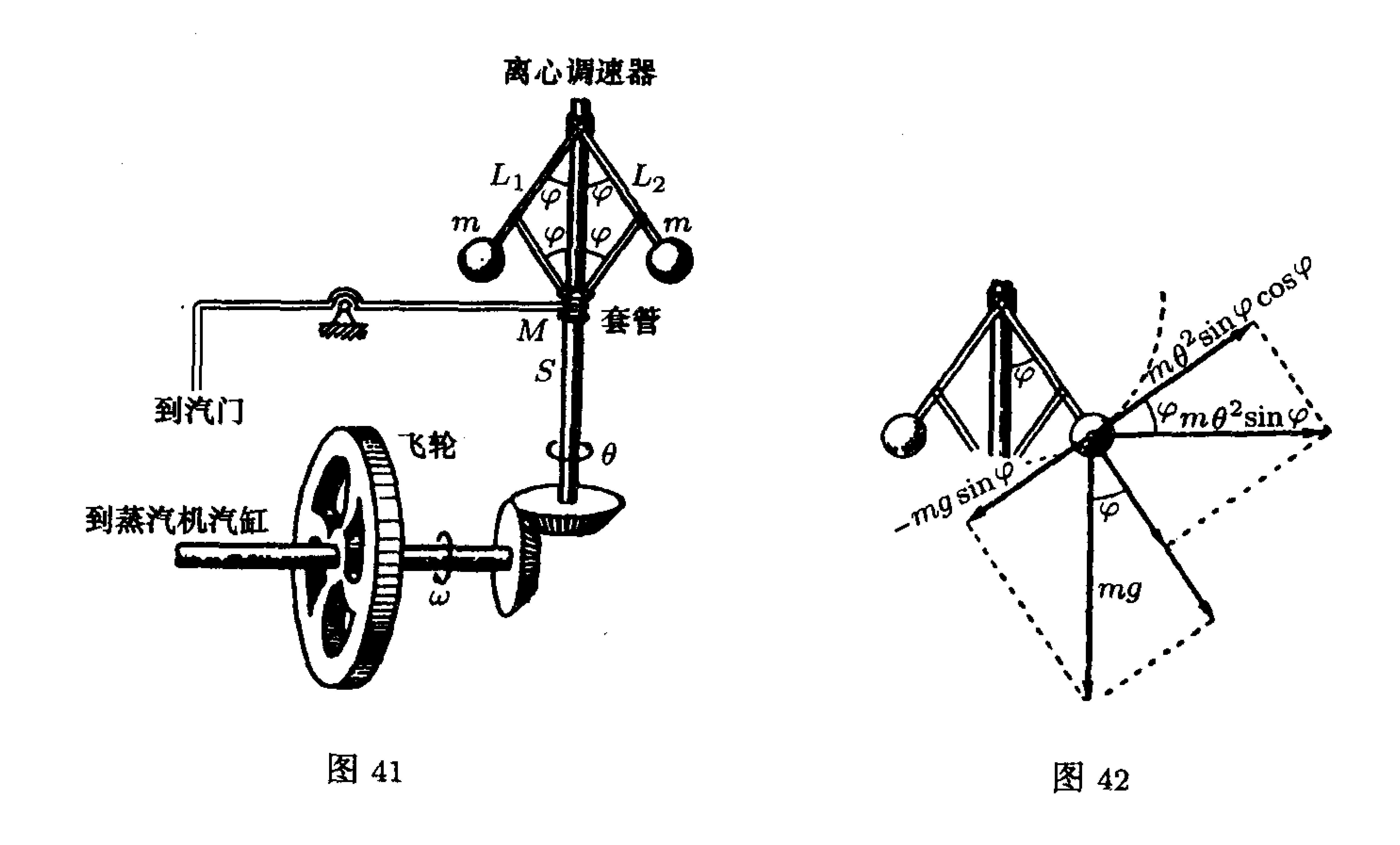


图 41　　　　图 42

离心调速器工作的简单描述是: 当角速度 θ 给定后, 杆 L_1 和 L_2 在力 (1),(2) 作用下得到的偏角 φ 由等式

$$m\theta^2\sin\varphi\cos\varphi - mg\sin\varphi = 0\,, \tag{6}$$

确定, 也就是使得合力 (5) 等于零. 从关系式 (6) 确定了角 φ 作为角速度 θ 的唯一单调增加函数, 因此瓦特调速器可以看成旋转速度的**量测器**. 这就是所谓调节器的**静力学的**考察. 实际上这里有动力现象. 质量 m 在力 (5) 的作用下产生了用微分方程描述的运动. 当质量 m 运动时, 作用在 m 上的力除了力 (5) 之外还有铰链的摩擦力. 它以十分复杂的形式依赖于所发生的运动. 为了在本质上简化这里存在的复杂性, 我们假设摩擦力与质量 m 的运动速度 $\dot\varphi$ 成正比, 且有与这个速度相反的符号, 即有量

$$-b\dot\varphi\,,$$

其中 b 为常数. 因此, 如果取 φ 作为确定质量 m 位置的坐标, 那么我们就得到关于 φ 的微分方程

$$m\ddot\varphi = m\theta^2\sin\varphi\cos\varphi - mg\sin\varphi - b\dot\varphi\,. \tag{7}$$

(这里对力 (5) 进行的计算是在 θ 和 φ 为常数的假设下作出的. 当 θ 和 φ 变动时有附加的力产生, 可是由于把杆固定在一个平面上, 这些附加力与杆及铰链的反作用力平衡, 因此, 方程 (7) 是正确的.)

蒸汽机有一个惯性矩为 J 的飞轮, 它在旋转时产生力偶, 且能作出有用的功, 例如提升矿场的吊斗. 因此, 蒸汽机的微分方程可以写成形式:

$$J\dot\omega = P_1 - P\,, \tag{8}$$

其中ω是飞轮的角速度, P_1是蒸汽的作用力矩, P是吊斗重量作用在飞轮上的力矩. 蒸汽的作用力矩P_1依赖于供给汽缸蒸汽的汽门的口径, 力矩P依赖于吊斗负载的大小.

将离心调速器连接在蒸汽机上的目的是维持运转的均衡性, 它"测量"飞轮旋转的速度, 如果转速太快就减小蒸汽的输入量, 如果转速太慢就增加蒸汽的输入量. 为实现这一目的, 我们用传动齿轮把蒸汽机的飞轮与调节器的垂直枢轴联系起来(图 41), 所以角速度ω与θ之间产生不变的联系:

$$\theta = n\omega, \tag{9}$$

其中n是所谓**转换数**. **机器对调节器的这种作用**, 其结果实现了对飞轮旋转速度的测量. 另一方面, 调节器的套管M与供给蒸汽的闸门的联系是

$$P_1 = F_1 + k(\cos\varphi - \cos\varphi^*), \tag{10}$$

这里φ^*是φ的某一"平均"值, 它靠近应当维持的调节量φ的值, F_1是当$\varphi = \varphi^*$时蒸汽作用力P_1 的值, 而$k > 0$是比例常数.

由 (10) 式看出, **调节器对蒸汽机的反作用**是用这样的方法来实现的, 即当角φ增大时, 蒸汽的输入量 (同时还有蒸汽的作用力P_1也) 减小. 由于所描述的机器和调节器相互作用的结果, 最后似乎完全实现了前面所提出的问题, 即当飞轮转速减小时, 蒸汽的输入量就增加了; 而当飞轮转速增加时, 蒸汽的输入量就减小了. 因此, 自然期望飞轮的转速将趋于定常. 这就是到 19 世纪中叶所制造的蒸汽机. 为了说明在 19 世纪中叶以后出现的调节器工作违背原来目的的原因, 必须准确地研究机器 - 调节器系统工作的动力学以及研究它的稳定性, 这就是维什涅格拉德斯基所做的工作.

从关系式 (7)—(10) 看出, 机器 - 调节器系统是用两个微分方程来描述:

$$\begin{cases} m\ddot{\varphi} = mn^2\omega^2\sin\varphi\cos\varphi - mg\sin\varphi - b\dot{\varphi}, \\ J\dot{\omega} = k\cos\varphi - F, \end{cases} \tag{11}$$

其中$F = P - F_1 + k\cos\varphi^*$是与负载有关的量. 方程组 (11) 中的第一个是二阶的, 为了把方程组变成标准形, 我们引进新变量ψ, 令

$$\psi = \dot{\varphi}.$$

于是, 可把方程组 (11) 写成标准形式:

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = \psi, \\ \dot{\psi} = n^2\omega^2\sin\varphi\cos\varphi - g\sin\varphi - \dfrac{b}{m}\psi, \\ \dot{\omega} = \dfrac{k}{J}\cos\varphi - \dfrac{F}{J}. \end{cases} \tag{12}$$

蒸汽机的正常工作是: 当负载 P 不变时, 它的飞轮旋转角速度 ω 不变, 亦即当 F 是常数时, 供应蒸汽的闸门是不动的. 这就表示角度 φ 保持不变. 于是, 问题是找出方程组 (12) 的具有下面形式的解:

$$\varphi = \varphi_0, \quad \psi = 0, \quad \omega = \omega_0,$$

也就是找出这个方程组的平衡位置. 当找到方程组 (12) 的平衡位置后, 问题就归结为研究它的稳定性.

令关系式 (12) 的右端等于零, 并求解所得到的方程, 这就找到了平衡位置的坐标:

$$\begin{cases} \psi_0 = 0, \\ \cos\varphi_0 = \dfrac{F}{k}, \\ n^2\omega_0^2 = \dfrac{g}{\cos\varphi_0}. \end{cases} \tag{13}$$

设

$$\varphi = \varphi_0 + \Delta\varphi, \quad \psi = \psi_0 + \Delta\psi, \quad \omega = \omega_0 + \Delta\omega.$$

经过这样的变换, 并把方程 (12) 线性化, 其结果得到方程组

$$\begin{aligned} &\Delta\dot{\varphi} = \Delta\psi, \\ &\Delta\dot{\psi} = n^2\omega_0^2\cos 2\varphi_0\Delta\varphi + n^2\omega_0\sin 2\varphi_0\Delta\omega - g\cos\varphi_0\Delta\varphi - \frac{b}{m}\Delta\psi, \\ &\Delta\dot{\omega} = -\frac{k}{J}\sin\varphi_0\Delta\varphi. \end{aligned}$$

把 (13) 中量 $n^2\omega_0^2$ 的值代入上面的第二个方程后, 经过简单计算即得:

$$\Delta\dot{\psi} = -\frac{g\sin^2\varphi_0}{\cos\varphi_0}\Delta\varphi - \frac{b}{m}\Delta\psi + \frac{2g\sin\varphi_0}{\omega_0}\Delta\omega.$$

这就得到了关于 $\Delta\varphi$, $\Delta\psi$, $\Delta\omega$ 的线性方程组, 它的特征多项式等于

$$D(p) = \begin{vmatrix} -p & 1 & 0 \\ -(g\sin^2\varphi_0)/\cos\varphi_0 & -b/m - p & (2g\sin\varphi_0)/\omega_0 \\ -(k\sin\varphi_0)/J & 0 & -p \end{vmatrix},$$

或是在算出行列式之后, 并乘以 -1, 则有

$$-D(p) = p^3 + \frac{b}{m}p^2 + \frac{g\sin^2\varphi_0}{\cos\varphi_0}p + \frac{2kg\sin^2\varphi_0}{J\omega_0}.$$

这个多项式的所有系数都是正的, 所以其稳定性的充分和必要条件 (根据定理 6) 是满足不等式:

$$\frac{b}{m}\cdot\frac{g\sin^2\varphi_0}{\cos\varphi_0} > 1\cdot\frac{2kg\sin^2\varphi_0}{J\omega_0},$$

或者换一种写法, 满足不等式:

$$\frac{bJ}{m} > \frac{2k\cos\varphi_0}{\omega_0} = \frac{2F}{\omega_0} \tag{14}$$

(见 (13)). 根据李雅普诺夫定理 (定理 19), 关系 (14) 是机器 – 调节器系统的**稳定性充分条件**.

为了说明最后这个不等式右端的意义, 我们引进在工程上起重要作用的蒸汽机**运行不平衡性**概念. 从关系式 (13) 看出, 当量 $F = P - F_1 + k\cos\varphi^*$ 变化 (即当负载 P 变化) 时, 定常速度 ω_0 也发生变化. 量 $\frac{d\omega_0}{dP}$ 描述了当负载 P 变化时量 ω_0 的变化速度; 它的绝对值 $\nu = \left|\frac{d\omega_0}{dP}\right|$ (正如我们马上就要看到的那样, 导数 $\frac{d\omega_0}{dP}$ 是负的) 称为蒸汽机的**运行不平衡性**. 根据 (13) 式, 我们有

$$F\omega_0^2 = 常数,$$

因此求导即得

$$\frac{d\omega_0}{dF} = -\frac{\omega_0}{2F}.$$

于是

$$\nu = \frac{\omega_0}{2F},$$

而稳定性条件 (14) 最终重写成形式:

$$\frac{bJ}{m} \cdot \nu > 1. \tag{15}$$

维什涅格拉德斯基根据公式 (15) 曾作出下列结论:

1° 增加球形重物的质量 m 有害于稳定性.

2° 减小摩擦系数 b 有害于稳定性.

3° 减小飞轮的惯性矩 J 有害于稳定性.

4° 减小运行不平衡性 ν 有害于稳定性.

为了作出对工程师们熟悉的结论并把注意吸引到其中最重要方面, 维什涅格拉德斯基在他的论文最后简明陈述了著名的"提纲":

第一论题 缓冲 (摩擦) 是灵敏且能正常工作调节器的非常重要组成部分, 简单地说, "没有无缓冲的调节器".

第二论题 无定向调节器 (亦即零不平衡性调节器) 即使有缓冲, 也不应当是可用的, 简单地说, "没有无不平衡性的调节器".

19 世纪中叶调节器不可靠的原因是由于技术的发展, 出现在不等式 (15) 中的四个量都向着破坏稳定性的方面变化. 由于汽门质量的提高 (它与机器功率的增大有关) 而采用更大的球形重物; 零件表面加工的改进导致摩擦的减小; 提高机器的运转

速度必然要减小飞轮的惯性矩 J；最后，减小速度对负载的依赖性趋势导致运行不平衡性的减小.

查明上述所有因素的不良影响后，维什涅格拉德斯基建议人为地增加摩擦（利用特殊的缓冲装置）和加大运行不平衡性（依靠与机器结构有关的数 n 和 k 的变化）.

§28. 极限环

在这一节将给出伟大的法国数学家庞加莱 (Poincaré) 所引进的极限环概念的定义，并对它进行某种程度的研究，还将给出一个允许在某些情况下建立极限环存在性的判据. 极限环概念无论在常微分方程理论本身还是在它对技术的应用都起着重要的作用.

我们将考虑标准的自治方程组 (见 § 15)

$$\dot{x}^i = f^i(x^1, \cdots, x^n), \quad i = 1, \cdots, n, \tag{1}$$

它的右端在变量 $x^1, \cdots, x^n$ 相空间 R 的某一开集 Δ 上有定义且有连续的一阶偏导数 $\dfrac{\partial f^i}{\partial x^j}$. 我们也将利用这个方程组的向量写法:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}). \tag{2}$$

本节最主要的论述是关于 $n = 2$ 的情形. 为了强调二维性，我们将说方程组 (1) 的相平面 P，而不说它的相空间 R. 在相平面的研究中，具有极大直观性的几何结构起了极重要的作用. 当开集 Δ 与整个相平面 P 完全一样的情况时绝不是平凡的，也为了简单起见，我们集中全部注意于这种情形.

极限圈及其附近轨线的性态

方程 (2)($n = 2$) 的孤立周期解称为这个方程的**极限圈**. 更全面地说：令 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\varphi}(t)$ 是方程 (2) 的周期解，而 K 是这个解在相平面 P 上描绘出的闭曲线. 如果存在这样的正数 ρ，使得对平面 P 上任一与 K 的距离小于 ρ 的点 $\boldsymbol{\xi}$，方程 (2) 的过点 $\boldsymbol{\xi}$ 的解都不是周期的，我们就说 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\varphi}(t)$ (以及轨线 K) 是**孤立的**周期解，并称它为**极限环**.

它的几何说法是，方程 (2) 在相平面 P 上的相图中，在闭轨 K 附近没有这方程另外的闭轨. 下面的定理解决了在极限圈 K 附近，方程 (2) 的轨线是如何运行的问题.

定理 20 *设 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\varphi}(t)$ 是方程 (2)($n = 2$) 的极限环，而 K 是这个解在平面 P 上描绘出来的闭轨线. 如所周知，闭曲线把平面分成两个区域:* **内部区域和外部区域**, *而且因为方程 (2) 的轨线互不相交，所以每一条不同于 K 的轨线相对于轨线 K 来说，或者在它的内部或者在它的外部. 可以证明，无论是在它的内部还是在它的外部的轨线，在靠近 K 的轨线性态都有两种彼此互相排斥的可能性，即所有位于其内部但开始时靠近于 K 的轨线或者当 $t \to +\infty$ 时 (图 43(a)) 或者当 $t \to -\infty$ 时 (图 43(b)) 都*

像螺旋线那样环绕着 K 而盘旋逼近于 K. 对所有位于外部但开始时靠近 K 的轨线也有同样的两种性态 (图 43(a),(b)).

如果所有开始时靠近于 K 的轨线 (无论在内部的还是在外部的都是) 当 $t \to +\infty$ 时盘旋逼近于 K, 那么极限圈 K 就称为**稳定的**(图 43(a)); 如果所有开始时靠近于 K 的轨线 (无论在内部的还是在外部的都是) 当 $t \to -\infty$ 时盘旋逼近于 K, 那么极限圈 K 就称为**完全不稳定的**(图 43(b)); 在另外的两种情况下 (即内轨线当 $t \to -\infty$ 时盘旋逼近于 K, 而外轨线当 $t \to +\infty$ 时盘旋逼近于 K; 或者与此相反的情形), 那么极限圈 K 就都称为**半稳定的**(图 43(c)).

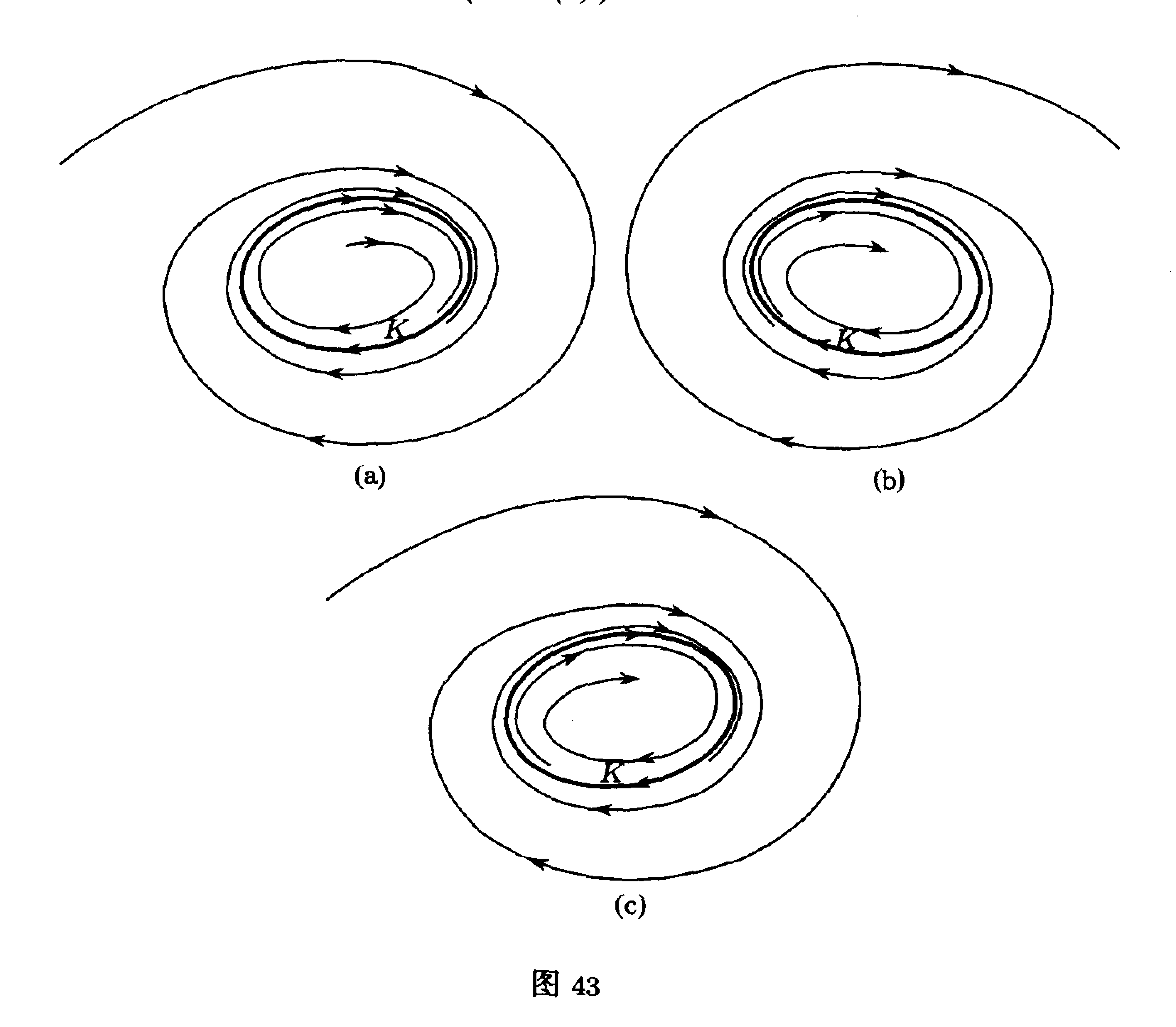


图 43

无论是定理 20 本身的证明, 还是更全面地描述轨线 "盘旋" 逼近于极限环, 都要依靠**后继函数**的概念. 这个函数有直观的几何意义, 而未给出其性质的详细证明, 但可以进行比较简单地描述.

我们给出这个描述. 令 K 是一条对应于以 τ 为周期的周期解在相平面 P 上的闭曲线. 其次, 设 L 为平面 P 中一条直线段, 它与曲线 K 相交, 而不会在它内部的唯一点 $\boldsymbol{a}$ 上与曲线相切. 在线段 L 上 (更确切地说, 在包含这个线段的直线上) 用通常的方法引进点的数值坐标. 点 $\boldsymbol{a}$ 的坐标用 u_0 表示. 我们通过线段 L 上以 u 为坐标的点 $\boldsymbol{p}$ 作出方程 (2) 的轨线, 并沿这条轨线在时间 t 增加的方向进行运动.

在几何上显然，如果点 $\boldsymbol{p}$ 很靠近点 $\boldsymbol{a}$，那么运动也将很靠近曲线 K，因此轨线将一次又一次地与线段 L 相交. 轨线运动经过近似于 τ 的时间发生了第一次相交，交点 $\boldsymbol{q}$ 的坐标我们用 $\chi_1(u)$ 来表示 (图 44). 同样，如果从点 $\boldsymbol{p}$ 沿轨线在时间减少的方向运动，那么经过近似于 τ 的时间，第一次与线段 L 交于某一点 r，其坐标用 $\chi_{-1}(u)$ 来表示. 两个函数 χ_1 和 χ_{-1} 都是连续的，而且互为反函数，亦即

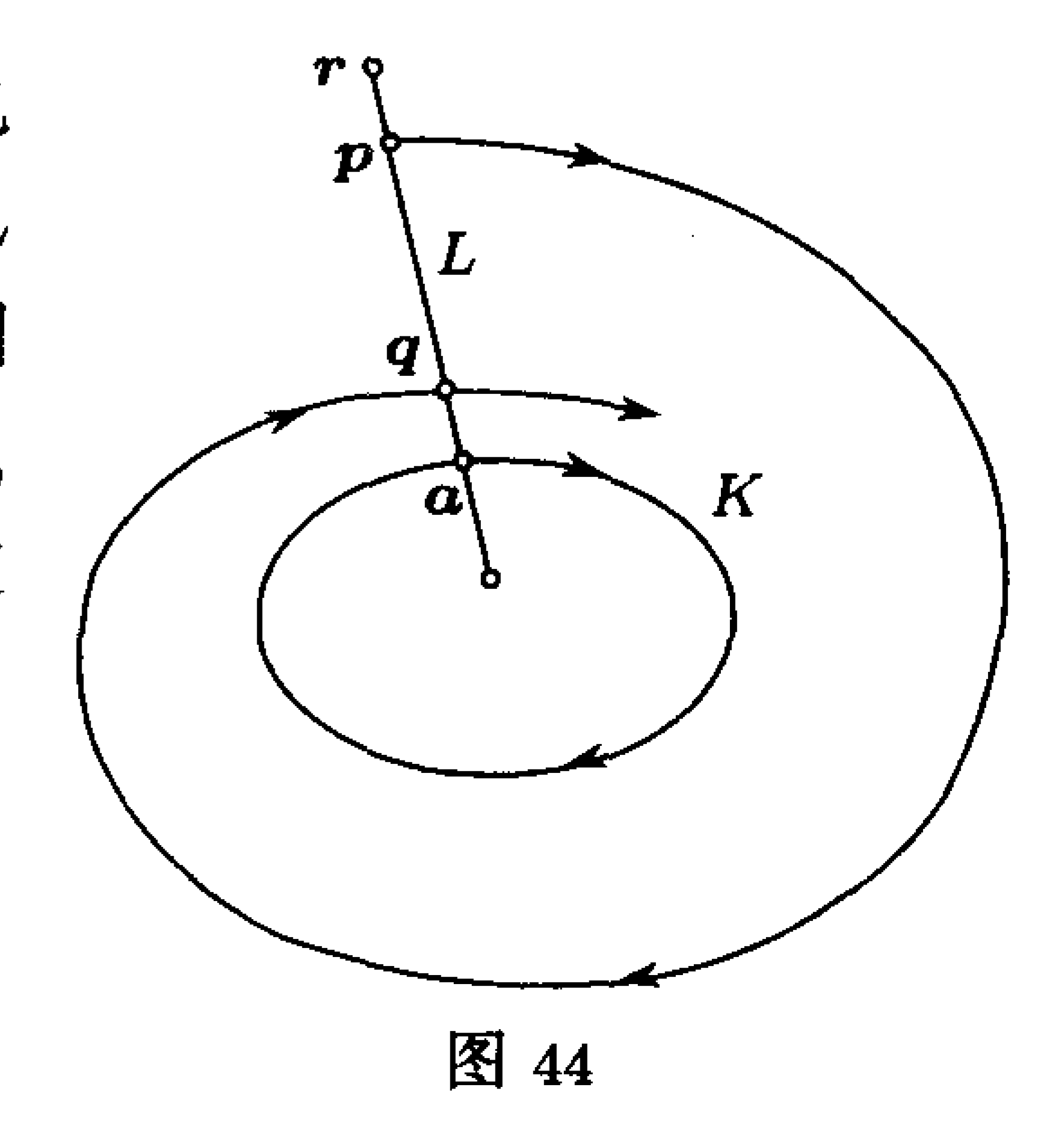


图 44

$$\chi_{-1}(\chi_1(u)) = u, \quad \chi_1(\chi_{-1}(u)) = u.$$

实际上，如果从点 q 朝时间减少的方向运动，那么第一次与线段 L 相交在点 $\boldsymbol{p}$，因为 $\chi_{-1}(\chi_1(u)) = u$. 同样，当从点 $\boldsymbol{r}$ 朝时间增加的方向运动时，第一次与线段 L 相交在点 $\boldsymbol{p}$，亦即

$$\chi_{-1}(\chi_1(u)) = u.$$

函数 $\chi = \chi_1$ 称为**后继函数**；对今后来讲重要的是这个函数连续，而且有连续的反函数 $\chi^{-1} = \chi_{-1}$.

实际上，函数 χ 和 χ^{-1} 都有连续导数 (见 (C))，但是在定理 20 的证明中用不到它的这个性质.

这里引用的直观几何讨论足以令人信服. 倾向于只满足懂得定理 20 证明的读者，就不必阅读严格论证后继函数的存在性及其性质的命题 (A) 和 (B).

(A) 我们用 $\boldsymbol{\varphi}(t, \boldsymbol{\xi})$ 记方程 (2) 以 $0, \boldsymbol{\xi}$ 为初始值的解. 令 L 为方程 (2) 的相平面 P 上的直线段. 在 L 上建立了数值坐标 v，因此线段的参数形式用线性方程

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{g}(v)$$

给出. 假设轨线 $\boldsymbol{\varphi}(t, \boldsymbol{\xi}_0)$ 在时刻 t_0 与线段 L 相交在它的内点 $\boldsymbol{a}$，其坐标为 v_0，因此有

$$\boldsymbol{\varphi}(t_0, \boldsymbol{\xi}_0) = \boldsymbol{g}(v_0),$$

而且轨线 $\boldsymbol{\varphi}(t, \boldsymbol{\xi}_0)$ 在时刻 t_0 不与线段 L 相切. 于是存在这样的正数 δ 和 ε，使得:

(1) 存在函数 $t(\boldsymbol{\xi})$ 和 $v(\boldsymbol{\xi})$，当 $|\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_0| < \delta$ 时有定义、连续且满足条件

$$\boldsymbol{\varphi}(t(\boldsymbol{\xi}), \boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{g}(v(\boldsymbol{\xi})); \quad t(\boldsymbol{\xi}_0) = t_0; \quad v(\boldsymbol{\xi}_0) = v_0; \quad |t(\boldsymbol{\xi}) - t_0| < \varepsilon. \tag{3}$$

(2) 唯一性成立；也就是说，如果当 $|\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_0| < \delta$, $|t - t_0| < \varepsilon$ 时有等式

$$\boldsymbol{\varphi}(t, \boldsymbol{\xi}) - \boldsymbol{g}(v) = \boldsymbol{0} \tag{4}$$

成立，那么量 $\boldsymbol{\xi}, t, v$ 满足条件:

$$t = t(\boldsymbol{\xi}), \quad v = v(\boldsymbol{\xi}). \tag{5}$$

从几何上来看，上述表示：在时刻 $t=0$ 从靠近点 $\boldsymbol{\xi}_0$ 的点 $\boldsymbol{\xi}$ 出发的轨线，在接近于 t_0 的时刻 $t(\boldsymbol{\xi})$ 与线段 L 相交于坐标近似于 v_0 的 $v(\boldsymbol{\xi})$ 的点，而且这种相交在某个时间区间 $|t-t_0|<\varepsilon$ 上是唯一的，而 $t(\boldsymbol{\xi})$ 和 $v(\boldsymbol{\xi})$ 还是 $\boldsymbol{\xi}$ 的连续函数.

值得注意，轨线 $\boldsymbol{\varphi}(t,\boldsymbol{\xi})$ 与线段 L 相交可以不仅在时刻 t_0，而且可以在另外某个时刻 t_1，其中交点甚至可以是点 $\boldsymbol{a}$ (这种情况出现了，如果 $\boldsymbol{\varphi}(t,\boldsymbol{\xi}_0)$ 是周期解)，但是从讨论在时刻 t_1 相交时得到的函数 $t(\boldsymbol{\xi})$ (可能还有 $v(\boldsymbol{\xi})$)，将显然不同于从讨论在时刻 t_0 相交时得到的函数.

命题 (A) 的证明几乎直接从把隐函数定理 (见 § 33) 应用到方程 (4) 之后得出，其中 $\boldsymbol{\xi}$ 看成自变量，而 t 和 v 为它的隐函数. 当 $\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{\xi}_0$ 时方程 (4) 有显然的解 $t=t_0, v=v_0$. 为了证明方程 (4) 左端的函数行列式在点 $(\boldsymbol{\xi}_0,t_0,v_0)$ 处不为零，我们将方程 (4) 写成数量的形式:

$$\varphi^i(t,\boldsymbol{\xi})-g^i(v)=0,\quad i=1,2. \tag{6}$$

这两个关系式左端对 t 的导数在点 $(\boldsymbol{\xi}_0,t_0,v_0)$ 处的值给出向量 $\dot{\boldsymbol{\varphi}}(t_0,\boldsymbol{\xi}_0)$ 的分量；这些关系式左端对 v 的导数在同一点处的值给出向量 $-\dfrac{d\boldsymbol{g}(v_0)}{dv}$ 的分量. 因为轨线 $\boldsymbol{\varphi}(t,\boldsymbol{\xi}_0)$ 在时刻 t_0 不与线段 L 相切，所以这两个向量线性无关. 因此，方程组 (6) 的函数行列式在点 $(\boldsymbol{\xi}_0,t_0,v_0)$ 处不为零. 于是隐函数定理对方程 (4) 可用，从而存在着连续解 $t(\boldsymbol{\xi}),v(\boldsymbol{\xi})$，它们在 $\boldsymbol{\xi}_0$ 的某个邻域 $|\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_0|<\alpha$ 上有定义，而且当 $\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{\xi}_0$ 时它们分别成为 t_0,v_0.

根据隐函数存在定理的第二部分，在变量 $\boldsymbol{\xi},t,v$ 的空间中存在点 $(\boldsymbol{\xi}_0,t_0,v_0)$ 的这样邻域 U，使得这个邻域中所有满足方程 (4) 的点也满足方程 (5).

与包含在命题 (A) 的陈述中不同，根据定理 27，要唯一性成立，不仅量 $|\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_0|$ 和 $|t-t_0|$ 要很小，而且量 $|v-v_0|$ 也要很小. 为了使得当只有上面所说的前两个量很小时就能证明唯一性，我们来证明：如果这两个量很小，而且点 $(\boldsymbol{\xi},t,v)$ 还满足条件 (4)，那么量 $|v-v_0|$ 也很小. 根据定理 27，在其中唯一性成立的邻域 U 可以用不等式

$$|\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_0|<\delta\leqslant\alpha,\quad |t-t_0|<\varepsilon,\quad |v-v_0|<\beta$$

给出.

从 § 23 的命题 (D) 得出，当 δ 充分小时，在整个区间 $|t-t_0|<\varepsilon$ 上有不等式 $|\boldsymbol{\varphi}(t,\boldsymbol{\xi})-\boldsymbol{\varphi}(t,\boldsymbol{\xi}_0)|<\gamma$ 成立，其中 γ 是预先给定的小数. 于是当 $|\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_0|<\delta, |t-t_0|<\varepsilon$ 时，δ 越小，轨线 $\boldsymbol{\varphi}(t,\boldsymbol{\xi}_0)$ 与线段 L 的交点就越位于靠近轨线段 $\boldsymbol{\varphi}(t,\boldsymbol{\xi}_0)$ $(|t-t_0|<\varepsilon)$，因此 δ 的充分小保证了这个交点坐标 v 与 v_0 之差足够小.

于是命题 (A) 得证.

(B) 设 $\boldsymbol{\varphi}(t,\boldsymbol{\xi})$ 是方程 (2) 以 $0,\boldsymbol{\xi}$ 为初始值的解；其次令 $\boldsymbol{\psi}(t,\boldsymbol{a})$ 是以 τ 为周期的周期解；K 是在相平面 P 上对应于解 $\boldsymbol{\psi}(t,\boldsymbol{a})$ 的闭曲线；而 L 是与曲线 K 不相切地交于 L 内部唯一的一点 $\boldsymbol{a}$ 的直线段. 在线段 L 上建立数值坐标系，因此 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{g}(v)$ 就是

利用这个坐标系给出的线段 L 的参数方程，且令 $v = u_0$ 为点 $\boldsymbol{a}$ 的坐标. 可以证明，当 $\alpha > 0$ 充分小时，无论 t 是正值还是 t 是负值，轨线 $\boldsymbol{\varphi}(t, \boldsymbol{g}(u)) = \boldsymbol{\varphi}(t, u)$ 总与线段 L 相交，其中 $|u-u_0| < \alpha$. 我们用 $t_1(u)$ 记轨线 $\boldsymbol{\varphi}(t, u)$ 与 L 相交时的最小正 t 值，而用 $\chi_1(u)$ 来记这个交点在线段 L 上的坐标. 同样用 $t_{-1}(u)$ 记轨线 $\boldsymbol{\varphi}(t, u)$ 与 L 相交时的按模最小负 t 值，而用 $\chi_{-1}(u)$ 来记这个交点在线段 L 上的坐标. 于是还可以证明，如果 α 充分小，那么当 $|u - u_0| < \alpha$ 时，所构造的全部四个函数

$$t_1(u), \quad \chi_1(u), \quad t_{-1}(u), \quad \chi_{-1}(u)$$

都连续，而且满足条件

$$t_1(u_0) = \tau, \quad \chi_1(u_0) = u_0, \quad t_{-1}(u_0) = -\tau, \quad \chi_{-1}(u_0) = u_0 .$$

此外，当 $|u - u_0|$ 充分小时，函数 χ_1 和 χ_{-1} 互为反函数，亦即

$$\chi_{-1}(\chi_1(u)) = u, \quad \chi_1(\chi_{-1}(u)) = u .$$

函数 $\chi = \chi_1$ 就称为**后继函数**.

为了证明命题 (B)，我们利用命题 (A). 假设 $\boldsymbol{\xi}_0 = \boldsymbol{a}, \boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{g}(u), t = k\tau$，这里 k 为任意整数. (实际上我们只用到了 $k = -1, 0, 1$ 的值.) 根据命题 (A)，存在满足条件

$$\boldsymbol{\varphi}(t_k(u), \boldsymbol{g}(u)) = \boldsymbol{g}(\chi_k(u)), \quad t_k(u_0) = k\tau, \quad \chi_k(u_0) = u_0 \tag{7}$$

的连续函数 $t_k(u) = t_k(\boldsymbol{g}(u))$ 和 $\chi_k(u) = v_k(\boldsymbol{g}(u))$，而且根据唯一性，满足条件的函数是唯一确定的. 特别有 $\chi_0(u) \equiv u$.

我们证明

$$\chi_k(\chi_l(u)) = \chi_{k+l}(u) . \tag{8}$$

利用关系式 (7) 和 § 26 中的命题 (C)，我们得到:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{g}(\chi_k(\chi_l(u))) &= \boldsymbol{\varphi}(t_k(\chi_l(u)), \boldsymbol{g}(\chi_l(u))) \\ &= \boldsymbol{\varphi}(t_k(\chi_l(u)), \boldsymbol{\varphi}(t_l(u), \boldsymbol{g}(u))) \\ &= \boldsymbol{\varphi}(t_k(\chi_l(u)) + t_l(u), \boldsymbol{g}(u)) , \end{aligned}$$

而且满足条件

$$t_k(\chi_l(u_0)) + t_l(u_0) = t_k(u_0) + t_l(u_0) = (k + l)\tau ;$$

$$\chi_k(\chi_l(u_0)) = u_0 .$$

从另一方面，我们有:

$$\boldsymbol{g}(\chi_{k+l}(u)) = \boldsymbol{\varphi}(t_{k+l}(u), \boldsymbol{g}(u)) ,$$

而且

$$\chi_{k+l}(u_0) = u_0\,,$$
$$\chi_{k+l}(u_0) = (k+l)\tau\,.$$

由于满足条件 (7) 的函数是唯一的, 因此我们得到:

$$t_k(\chi_l(u)) + t_l(u) = t_{k+l}(u)\,,$$
$$\chi_k(\chi_l(u)) = \chi_{k+l}(u)\,.$$

于是, 关系式 (8) 得证.

在特殊情况下, 当 $k=-1,\ l=1$ 和 $k=+1,\ l=-1$ 时, 可得:

$$\chi_{-1}(\chi_1(u)) = \chi_0(u) = u\,,$$
$$\chi_1(\chi_{-1}(u)) = \chi_0(u) = u\,.$$

因此, 函数 $\chi=\chi_1$ 和 $\chi^{-1}=\chi_{-1}$ 互为反函数.

我们现在证明, 当 $|u-u_0|$ 充分小, 轨线 $\varphi(t,u)$ 当 t 增加时在时刻 $t_1(u)$ 第一次与 L 相交, 而当 t 减小时在时刻 $t_{-1}(u)$ 第一次与 L 相交. 从交点的唯一性 (见 (A)) 得出, 在三个区间 $|t-(-\tau)|<\varepsilon,\ |t|<\varepsilon,\ |t-\tau|<\varepsilon$ 中的每一个上, 轨线 $\varphi(t,u)$ 都与线段 L 相交于唯一的一个点.

按照下面的讨论, 当 $|t|<(\varepsilon+\tau)$ 和 $|u-u_0|$ 充分小时, 轨线 $\varphi(t,u)$ 与线段 L 一般不会有其他交点.

当

$$\varepsilon \leqslant t \leqslant (\tau-\varepsilon) \quad 或者 \quad -(\tau-\varepsilon) \leqslant t \leqslant -\varepsilon \tag{9}$$

时, 由点 $\varphi(t,\boldsymbol{a})$ 所描绘的轨线 K 的一部分 K^* 是闭集, 它与闭集 L 不相交, 因此在集合 K^* 与 L 之间的距离 ρ 是正的. 其次, 根据 §23 的命题 (D), 当 t 属于集合 (9) 时, 只要量 $|u-u_0|$ 充分小, 在点 $\varphi(t,\boldsymbol{a})$ 与 $\varphi(t,u)$ 之间的距离小于 ρ.

因此, 当 t 属于集合 (9) 时, 轨线 $\varphi(t,u)$ 也不与线段 L 相交.

于是命题 (B) 得证.

定理 20 的证明 我们在相平面 P 上选取直线段 L, 它与曲线 K 不相切地交于唯一的一点 $\boldsymbol{a}$, 而且 $\boldsymbol{a}$ 是 L 的内点. 在线段 L 上建立数值坐标系, 并以 u_0 记点 $\boldsymbol{a}$ 的坐标. 为了确定起见, 我们假设线段 L 上位于曲线 K 外部的点对应于大于 u_0 的坐标, 而位于 K 内部的点对应于小于 u_0 的坐标. 用 χ 表示对应于线段 L 的后继函数 (见 (B)).

因此对于充分小区间 $|u-u_0|<\alpha$ 中所有的数, 方程 (2) 从线段 L 上以 u 为坐标的点 $\boldsymbol{p}$ 出发的轨线, 当时间增加时, 第一次与线段 L 相交于以 $\chi(u)=v$ 为坐标的点 $\boldsymbol{q}$.

显然, 我们有:

$$\chi(u_0) = u_0\,.$$

此外, 如果对于数 u 满足等式

$$\chi(u) = u\,, \tag{10}$$

那么从以 u 为坐标的点 $\boldsymbol{p}$ 出发的轨线是闭的. 因为, 按照假设, 轨线 K 是孤立闭轨线, 所以存在这样小的正数 α, 使得当 $|u-u_0|<\alpha$ 时, 方程 (10) 有唯一的解 $u=u_0$. 由此得出, 对于区间 $u_0<u<u_0+\alpha$ 上所有的点, 两个不等式:

$$\chi(u)<u, \tag{11}$$

$$\chi(u)>u, \tag{12}$$

中有一个成立. 事实上, 如果对于这个区间的一些点不等式 (11) 成立, 而对于另一些点有不等式成立, 那么, 根据函数 χ 的连续性, 在同一个区间上就存在满足等式 (10) 的点 u, 这是不可能的. 因为从以属于区间 $u_0<u<u_0+\alpha$ 的 u 为坐标的点 $\boldsymbol{p}$ 出发的轨线不可能与轨线 K 相交, 因此两个点 $\boldsymbol{p}$ 和 $\boldsymbol{q}$ 都位于曲线 K 的一边 (即在 K 的外部), 所以

$$\chi(u)>u_0. \tag{13}$$

我们现在考虑当对于区间 $u_0<u<u_0+\alpha$ 上所有的点都有不等式 (11) 成立的情况. 设 u_1 为这个区间的任一个数. 令

$$u_{i+1}=\chi(u_i),\quad i=1,2\cdots, \tag{14}$$

于是我们就递推地定义了数列 $u_1,u_2,\cdots$. 由于不等式 (11) 和 (13), 这些数都位于区间 $u_0<u<u_0+\alpha$ 上, 而且组成了一个递减序列. 因而它们有某个极限 u^*. 在等式 (14) 中当 $i\to\infty$ 时取极限, 我们得到 $\chi(u^*)=u^*$, 而因为点 u^* 属于区间 $|u-u_0|<\alpha$, 根据方程 (10) 在这个区间上解的唯一性, 所以有 $u^*=u_0$. 因此 $\lim\limits_{i\to\infty}u_i=u_0$. 用 $\boldsymbol{p}_i$ 记线段 L 上以 u_i 为坐标的点, 我们看出, 从点 $\boldsymbol{p}_1$ 出发的轨线与线段 L 相交的点列 $\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\cdots$ 收敛于位于轨线 K 上的点 $\boldsymbol{a}$. 由于沿着我们的轨线从点 $\boldsymbol{p}_i$ 到点 $\boldsymbol{p}_{i+1}$ 的运行时间接近于极限环 K 的周期 τ (特别, 也是有界的), 因此当 i 增大时, 从点 $\boldsymbol{p}_i$ 到点 $\boldsymbol{p}_{i+1}$ 的整个轨线段都紧靠于轨线 K (见 § 23,(D)). 这也意味着, 从点 $\boldsymbol{p}_1$ 出发的轨线当 $t\to+\infty$ 时盘旋逼近于轨线 K. 于是, 这就证明了当满足不等式 (11) 时, 在线段 L 上以属于区间 $u_0<u<u_0+\alpha$ 的 u 为坐标的任一点出发的轨线, 当 $t\to+\infty$ 时都盘旋逼近于 K.

如果在区间 $u_0<u<u_0+\alpha$ 上有不等式 (12) 成立, 那么对于 χ 的反函数 $\chi^{-1}(v)$ 在某个区间 $u_0<u<u_0+\beta$ 上有不等式

$$\chi^{-1}(v)<v$$

成立. 由此出发, 我们同样证明, 这时在线段 L 上以属于区间 $u_0<v<u_0+\beta$ 的 v 为坐标的任一点出发的轨线, 当 $t\to+\infty$ 时都盘旋逼近于 K.

类似地研究在线段 L 上以属于充分小区间 $u_0>v>u_0-\gamma$ 的 u 为坐标的点出发的轨线性态.

因为沿着充分靠近于轨线 K 的每一条轨线都与线段 L 相交于其坐标充分近似于 u_0 的点，所以我们是分析了**所有**靠近极限环轨线的性态.

于是定理 20 就完全证明了.

注　为了把函数 $\chi(u)$ 在 u_0 附近的性态与无论是内部轨线还是外部轨线的性态之间关系统一在一个公式里，我们考察不等式

$$\begin{cases} |\chi(u)-u_0|<|u-u_0|, \\ |\chi(u)-u_0|>|u-u_0|. \end{cases} \tag{15}$$

如果在曲线 K (外面或者里面) 的半邻域中满足 (15) 中的第一个不等式，那么点 $\boldsymbol{q}$ 在线段 L 上比点 $\boldsymbol{p}$ **更靠**近点 $\boldsymbol{a}$，因此在这半邻域中的轨线当 $t\to+\infty$ 时盘旋地逼近于 K. 如果满足 (15) 中的第二个不等式，那么在这半邻域中的轨线当 $t\to-\infty$ 时盘旋地逼近于 K.

(C)　后继函数 $\chi=\chi_1$ 和它的反函数 $\chi^{-1}=\chi_{-1}$ (见 (B)) 有连续导数.

为了证明这条命题，我们想到函数 $\chi_k(u), k=\pm1$，是由方程 (7):

$$\boldsymbol{\varphi}(t_k,\boldsymbol{g}(u))=\boldsymbol{g}(\chi_k)=\boldsymbol{0} \tag{16}$$

所确定，其中 u 是自变量，而 t_k 和 χ_k 是作为 u 的隐函数而由 (16) 确定. 由于函数 $\boldsymbol{\varphi}(t,\boldsymbol{\xi})$ 对向量 $\boldsymbol{\xi}$ 的分量有连续偏导数 (见定理 17)，而 u 的线性函数 $\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{g}(u)$ 对 u 有连续导数，因此关系式 (16) 左端对 u 有连续导数. 所以根据定理 28，由方程 (16) 所确定的隐函数 $t_k(u)$ 和 $\chi_k(u)$ 对 u 有连续导数.

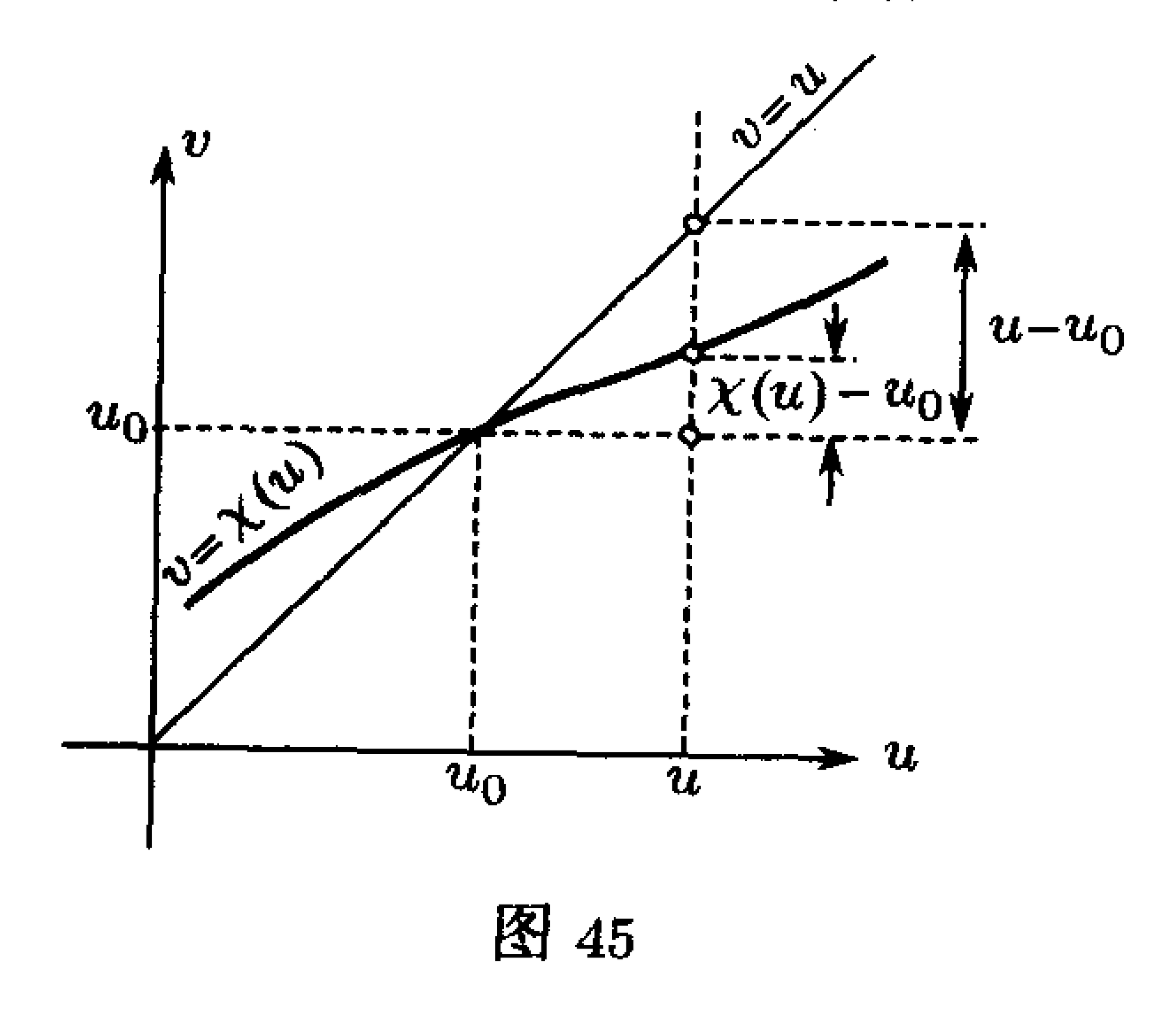


图 45

于是命题 (C) 证毕.

后继函数 $\chi(u)$ 的几何研究有很大的诱惑力. 在变量 u, v 的平面上，把函数 $\chi(u)$ 表示成方程图形的形式

$$v=\chi(u), \tag{17}$$

这时为了方便起见，假设 $u_0>0$. 为了研究方程 (10) 的解，除了曲线 (17) 之外，我们还考察第一象限的角平分线 (图 45):

$$v=u. \tag{18}$$

为了求出方程 (10) 所有的解，应该求出曲线 (17) 和 (18) 所有的交点. 为了使得闭轨 K 是极限环的必要和充分条件是: 点 (u_0,u_0) 为图形 (17) 和 (18) 的孤立交点. 如果这两个图形在点 (u_0,u_0) 处不彼此相切，即如果 $\chi'(u_0)\neq1$，那么它们的交点 (u_0,u_0) 必定是孤立的，这时称轨线 K 为**粗的**极限环. 当 $\chi'(u_0)<1$ 时 (见图 45)，在两个半邻域中 (15) 的第一个不等式显然都满足，因而极限环 K 是稳定的. 当 $\chi'(u_0)>1$ 时 (图 46) 满足 (15) 中的第二个不等式，因而极限环 K 是完全不稳定的. 如果图形 (17)

和 (18) 在点 (u_0, u_0) 处彼此相切, 但是曲线 (17) 从分角线 (18) 的一侧穿到另一侧, 那么极限环或者是稳定的或者是完全不稳定的. 如果曲线 (17) 切于分角线 (18), 并且位于它的一侧 (图 47), 那么对应的极限环是半稳定的.

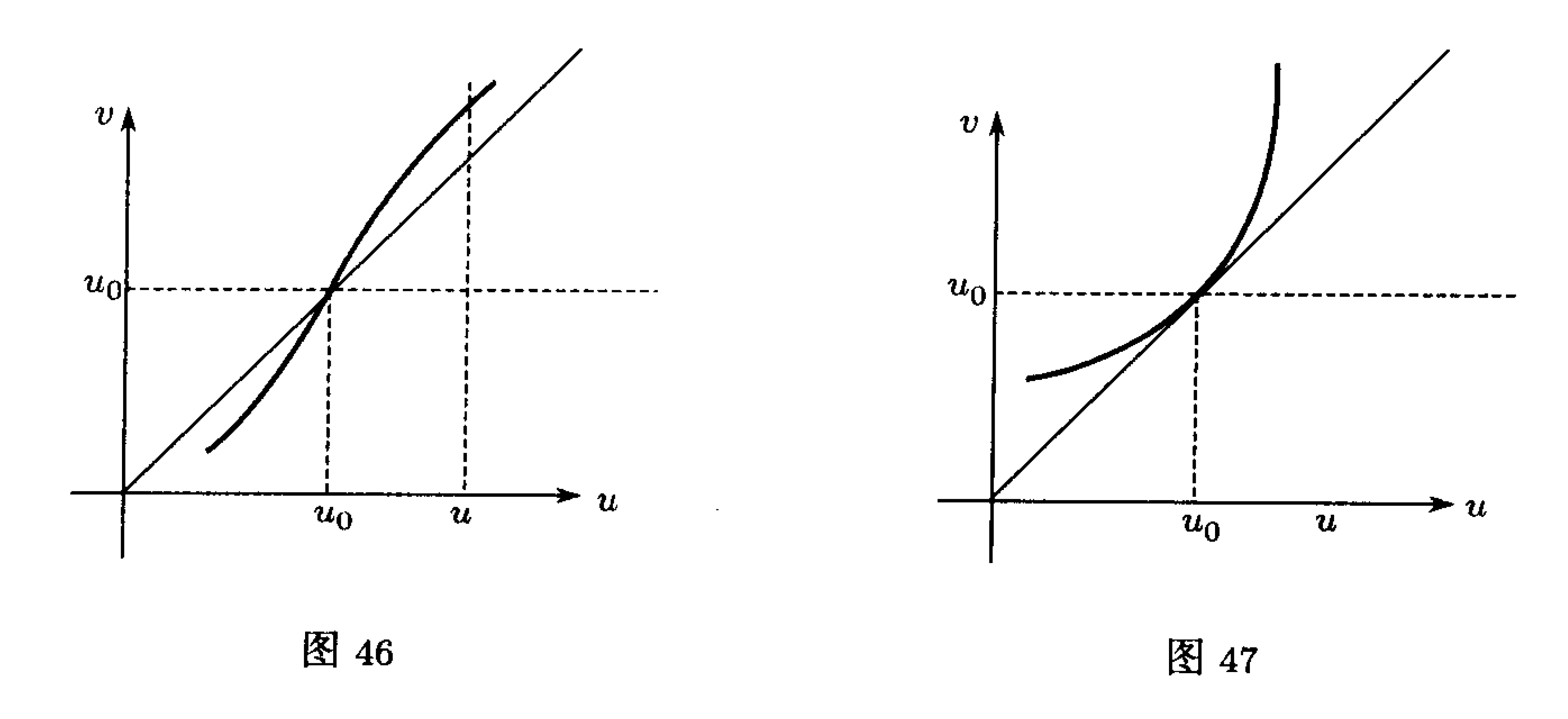


图 46　　图 47

极限环的存在性判据

(D)　设 $\varphi(t)$ 是方程 (2) (阶数 n 为任意) 的某一解, 它对所有 $t \geqslant t_0$ 的值都有定义, 而且对这些 t 值, 它总位于 Δ 中的有界闭集 F 内. 空间 R 的点 $\boldsymbol{p}$ 称为解 $\varphi(t)$ 的 ω-**极限点**, 如果存在无限增加的 t 值 (大于 t_0) 序列

$$t_1, t_2, \cdots, t_k, \cdots; \quad \lim_{k\to\infty} t_k = \infty,$$

使得

$$\lim_{k\to\infty} \varphi(t_k) = \boldsymbol{p}.$$

解 $\varphi(t)$ 的所有 ω-极限点的集合 Ω 称为 ω-**极限集合**. 可以证明, 集合 Ω 是一个非空有界闭集, 且由整条轨线组成; 后者意味着: 如果点 $\boldsymbol{\xi}$ 属于 Ω, 那么以 $(0, \boldsymbol{\xi})$ 为初始值的解 $\varphi(t, \boldsymbol{\xi})$ 对所有 t 值有定义, 而且 $\varphi(t, \boldsymbol{\xi})$ 的整条轨线都位于集合 Ω 中. 显然, 轨线 $\varphi(t, \boldsymbol{\xi})$ 的 ω-极限集合也全部地被包含在 Ω 中.

我们来证明命题 (D). 从集合 F 为有界闭集推出, 集合 Ω (显然, 被包含在 F 中) 是非空有界集. 我们来证明它也是闭的. 设

$$\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \cdots, \boldsymbol{p}_k, \cdots$$

是集合 Ω 中的某一点列, 它收敛于集合 F 中的某一点 $\boldsymbol{p}$; 现在来证明 $\boldsymbol{p}$ 属于 Ω. 令 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_k, \cdots$ 和 $s_1, s_2, \cdots, s_k, \cdots$ 是两个这样的正数序列, 它们满足:

$$\lim_{k\to\infty} \varepsilon_k = 0; \quad \lim_{k\to\infty} s_k = \infty.$$

因为点 $\boldsymbol{p}_k$ 属于 Ω，所以可找到这样的 $t_k \geqslant s_k$，使得在点 $\boldsymbol{p}_k$ 和 $\varphi(t_k)$ 之间的距离小于 ε_k. 对于所选取的值

$$t_1, t_2, \cdots, t_k, \cdots; \quad \lim_{k\to\infty} t_k = \infty,$$

我们得到

$$\lim_{k\to\infty} \varphi(t_k) = \boldsymbol{p},$$

这就意味着点 $\boldsymbol{p}$ 属于 Ω.

我们现在来证明，集合 Ω 是由整条轨线所组成的. 设 $\boldsymbol{\xi}$ 是集合 Ω 中的任意一点，而 $\varphi(t,\boldsymbol{\xi})$ 是以 $(0,\boldsymbol{\xi})$ 为初始值的解. 其次再设 T 是变量 t 这样的值 (它也可能是负的)，对于 $t = T$，解 $\varphi(t,\boldsymbol{\xi})$ 有定义，因而 $\varphi(T,\boldsymbol{\xi})$ 存在. 因为点 $\boldsymbol{\xi}$ 属于 Ω，所以可找到这样的无限增加序列

$$t_1, t_2, \cdots, t_k, \cdots; \quad \lim_{k\to\infty} t_k = \infty,$$

使得

$$\lim_{k\to\infty} \varphi(t_k) = \boldsymbol{\xi}. \tag{19}$$

由于解 $\varphi(t)$ 对所有充分大的 t 值有定义，因此当 T 给定时，(从某个 k 起) 定义 (见 §26,(C))

$$\varphi(t_k + T) = \varphi(T, \varphi(t_k)).$$

根据定理 14，从公式 (19) 我们有

$$\lim_{k\to\infty} \varphi(t_k + T) = \lim_{k\to\infty} \varphi(T, \varphi(t_k)) = \varphi(T, \boldsymbol{\xi}),$$

由此得出，点 $\varphi(T,\boldsymbol{\xi})$ 属于集合 Ω，从而也属于 F. 因此无论 t 是增大还是减小，轨线 $\varphi(t,\boldsymbol{\xi})$ 都不可能跑出集合 F，所以根据 §24 的命题 (C) 即知，它对所有 t 值都有定义.

于是命题 (D) 得证.

我们来考察某些特殊情况下的 ω-极限集合. 如果解 $\varphi(t)$ (见 (D)) 是平衡位置，亦即 $\varphi(t) \equiv \boldsymbol{x}_0$，那么解 $\varphi(t)$ 的 ω-极限集合，显然，就只由一个点 $\boldsymbol{x}_0$ 所组成；如果 $\varphi(t)$ 是描写闭轨 K 的周期解，那么解 $\varphi(t)$ 的 ω-极限集合显然就是 K. 最后，如果 K 是周期解，而 $\varphi(t)$ 当 $t \to +\infty$ 时盘旋地逼近 K，那么 K 就是 $\varphi(t)$ 的 ω-极限集合.

我们现在来证明，在某些情形下可能给出判断周期解存在性的定理. 在方程组 (1) 的右端函数是解析的情况下，一个周期解或者是极限环，或者是包含在周期轨线族之中 (见例题 3).

定理 21　设 $\varphi(t)$ 是方程 (2)$(n = 2)$ 的解，它对于所有 $t \geqslant t_0$ 的值都有定义，且对于这些 t 值，$\varphi(t)$ 的轨线位于被包含在 Δ 内的有界闭集 F 中，并令 Ω 为它的 ω-极限

集合. 如果集合 Ω 不含有平衡位置, 那么它就是由一条闭轨 K 所组成. 这时可能有两种情况: (1) $\varphi(t)$ 是周期解, K 就是由它所描出的轨线; (2) 由解 $\varphi(t)$ 描出的轨线当 $t \to +\infty$ 时盘旋逼近于 K.

证明 如果 $\varphi(t)$ 是周期解, 那么集合 Ω 就是由解 $\varphi(t)$ 描出的唯一周期轨线 K 所组成的, 因而定理的结论是显然的 (情形 (1)). 我们假设解 $\varphi(t)$ 不是周期的, 并令 $\boldsymbol{b}$ 为集合 Ω 中的任一点. 经过点 $\boldsymbol{b}$ 引一条直线段 L, 它与从点 $\boldsymbol{b}$ 出发的相速度向量 $f(\boldsymbol{b})$ 不共线 (因为按照假设集合 Ω 中的点 $\boldsymbol{b}$ 不是平衡位置, 所以 $f(\boldsymbol{b}) \neq 0$), 且选择这一线段这么短, 使得经过这线段的所有轨线都像通过 $\boldsymbol{b}$ 点的轨线那样与它相交 (不相切) 在同一方向 (图 48). 因为点 $\boldsymbol{b}$ 是轨线 $\varphi(t)$ 的 ω-极限点, 而且 $\varphi(t)$ 不是闭的, 所以这轨线必与 L 在无穷多个不同的点相交 (见 (A)). 设 $\boldsymbol{a}_1 = \varphi(t_1)$ 和 $\boldsymbol{a}_2 = \varphi(t_2)$ 是轨线 $\varphi(t)$ 和线段 L 的两个前后相继的交点 ($t_1 < t_2$), 用 M 表示轨线 $\varphi(t)$ 在 $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ 中的一段. 它与直线段 $\overline{\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2}$ 一起组成一条闭曲线 Q, Q 把平面分成两个区域 G_1 与 G_2. 设 h 是充分小的正数. 从几何上来看显然有 (见图 49): 点 $\varphi(t_1 - h)$ 与点 $\varphi(t_2 + h)$ 位在曲线 Q 的两边; 我们设 $\varphi(t_1 - h)$ 属于 G_1, 而 $\varphi(t_2 + h)$ 属于 G_2. 所有通过线段 $\overline{\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2}$ 的轨线都是从区域 G_1 进入到区域 G_2 的, 因此, 没有任何一条轨线能够通过这条线段从区域 G_2 中走出来. 因为 M 是一段轨线, 而轨线是不能彼此相交的, 所以没有任何轨线可以通过 M 走进或者走出区域 G_2. 因为轨线 $\varphi(t)$ 的一段 M 仅在它的两端与线段 L 相交, 所以线段 L 的两个端点位于闭曲线 Q 的不同侧面, 用 $\boldsymbol{a}$ 记 L 位于区域 G_2 内的那个端点. 轨线 $\varphi(t)$ 当 $t > t_2 + h$ 时完全在区域 G_2 中而不可能再与线段 $\overline{\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2}$ 相交; 所以点 $\boldsymbol{b}$ 不属于线段 $\overline{\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2}$ (见 (A)), 因而它应该位于线段 $\overline{\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}_2}$ 上. 现在, 如果以 $\boldsymbol{a}_3 = \varphi(t_3)$ 记轨线 $\varphi(t)$ 在 $\boldsymbol{a}_2$ 之后 (在时间上) 与线段 L 相交的后继点, 那么由类似的讨论看出, 它位于线段 $\overline{\boldsymbol{b}\boldsymbol{a}_2}$ 上 (图 49). 以

$$\boldsymbol{a}_4 = \varphi(t_4), \cdots, \boldsymbol{a}_k = \varphi(t_k), \cdots$$

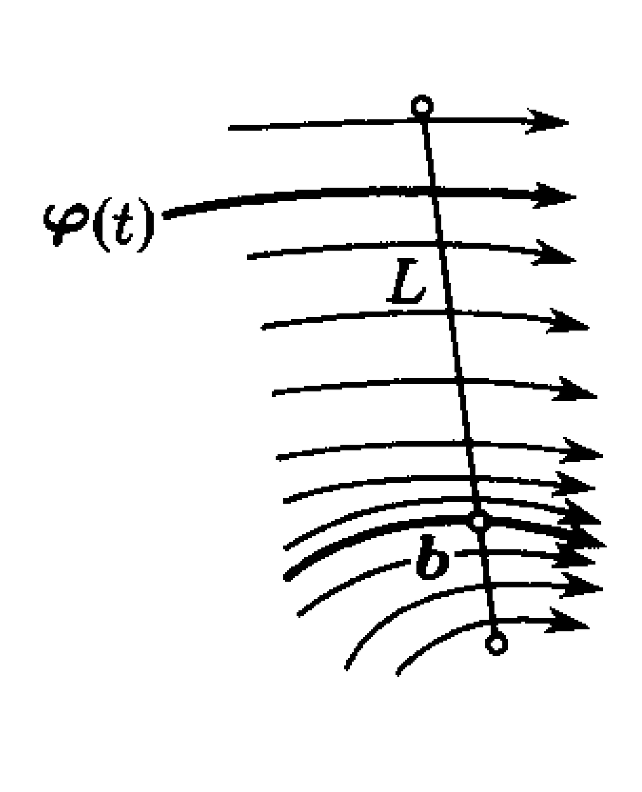


图 48

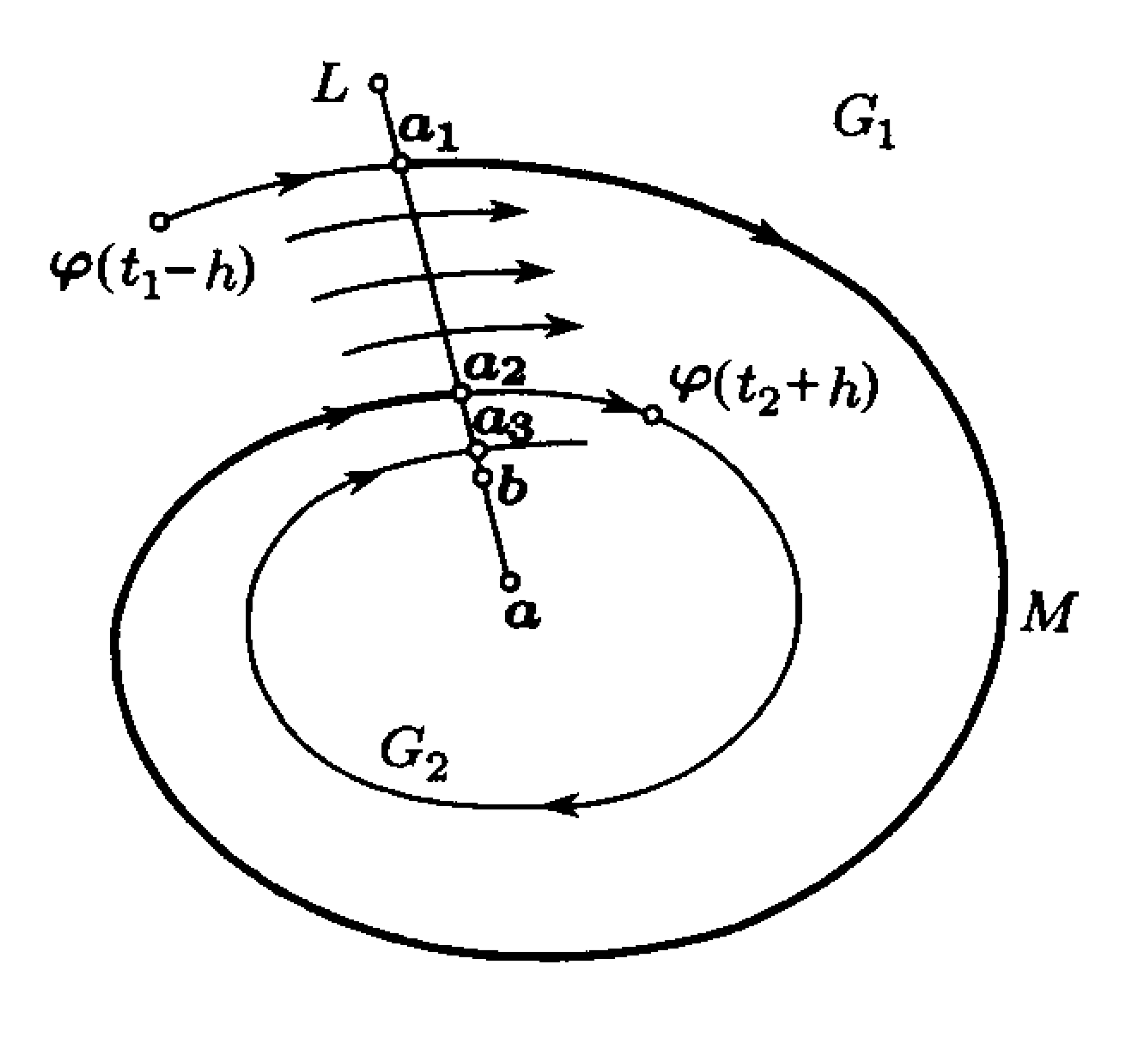


图 49

记轨线 $\varphi(t)$ 与线段 L 一个接一个 (在时间上) 相继的交点, 我们相信它们在 L 上形成一个沿着从 $\boldsymbol{a}_1$ 到 $\boldsymbol{b}$ 方向进行的单调点列. 我们证明, 序列 $a_1, \cdots, \boldsymbol{a}_k, \cdots$ 的极限 $\boldsymbol{b}'$ 就是 $\boldsymbol{b}$.

为此, 我们首先证明序列 $t_1, t_2, \cdots, t_k, \cdots$ 是无限增加的. 假设 $\lim\limits_{k\to\infty} t_k = \tau < +\infty$. 于是 $\varphi(\tau) = \boldsymbol{b}'$, 且 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{b}') = \varphi'(t) = \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{\varphi(\tau) - \varphi(t_k)}{\tau - t_k}$, 而这是不可能的, 因为这就表示向量 $\varphi(\tau) - \varphi(t_k)$ 的方向与线段 L 的方向一致, 但向量 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{b}')$ 与它不共线. 因此, 应该满足关系式 $\lim\limits_{k\to\infty} t_k = +\infty$, 所以当 $t \geqslant t_1$ 时整条轨线 $\varphi(t)$ 与 L 只在点 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_k, \cdots$ 处相交. 因而这轨线在线段 L 上仅有一个 ω-极限点 $\boldsymbol{b}'$ (见 (A)) , 亦即 $\boldsymbol{b}' = \boldsymbol{b}$. 我们注意到, 点 $\boldsymbol{b}$ 本身不是平衡位置.

现在证明, 轨线 $\varphi(t)$ 不可以位于任何其他轨线 $\psi(t)$ 的 ω-极限集合中. 假设与此相反. 那么轨线 $\varphi(t)$ 的每一个点都是 $\psi(t)$ 的 ω-极限点 (见 (D)) ; 特别, 点 $\boldsymbol{a}_1$ 也是这样. 由于点 $\boldsymbol{a}_1$ 不是平衡位置, 所以根据上面的证明, 轨线 $\psi(t)$ 与 L 的交点序列

$$\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_k, \cdots$$

构成了收敛于 $\boldsymbol{a}_1$ 的单调序列, 因而 $\psi(t)$ 在 L 上就不存在另外的 ω-极限点, 但是这与 $\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \cdots$ 全都位于轨线 $\varphi(t)$ 上, 从而也都是轨线 $\psi(t)$ 的 ω-极限点相矛盾.

这样就证明了: **在非闭轨线的 ω-极限点中, 如果没有平衡位置, 那么这条非闭轨线本身不能由 ω-极限点构成.**

由于轨线 K 被包含在轨线 $\varphi(t)$ 的 ω-极限集合 Ω 中, 而集合 Ω 又是闭的 (见 (D)), 因此轨线 K 的所有 ω-极限点也都被包含在 Ω 中, 从而没有平衡位置. 这样一来, 对于轨线 K 就可以应用上面的命题, 因此轨线 K 也应该是闭的. 从整个结构看出, 轨线 $\varphi(t)$ 盘旋逼近于 K, 所以集合 Ω 仅由经过点 $\boldsymbol{b}$ 的闭轨线 K 所组成.

于是定理 21 得证.

例题

1. 我们来给出形式 (1) 方程组 ($n = 2$) 的例子, 它有各种类型的周期解, 特别是有各种形式的极限圈. 我们首先是在极坐标 φ, ρ 之下给出方程, 后面再把它变换成笛卡儿坐标 x, y. 考虑到以后向笛卡儿坐标的变换, 我们用如下的形式给出方程:

$$\dot{\varphi} = 1, \quad \dot{\rho} = \rho g(\rho^2), \tag{20}$$

其中 $g(u)$ 是其自变量的连续可微函数, 它对自变量所有非负的值都有定义. 在极坐标下讨论时, 我们将只用到 ρ 是正值.

将满足 $g(\rho^2) = 0$ 的所有正值 ρ 的集合记为 N, 而它在正数集合中的余集记为 D. N 中的每一个数 u_0, 显然, 对应着方程 (20) 的解:

$$\varphi = t, \quad \rho = u_0;$$

它所对应的轨线 K_{u_0} 是闭的：它是在平面 P 上以坐标原点为中心，以 u_0 为半径的圆周．由于集合 N 在整个正数集合中是闭的，所以 D 是开的，且由有限个或者可数个彼此互不相交的区间组成．令 $u_1 < \rho < u_2$ 是**有限个**区间中的一个．于是闭轨 K_{u_1} 和 K_{u_2} 在平面 P 上界定出一个环 Q．对于区间 $u_1 < \rho < u_2$ 中的所有数 ρ，函数 $g(\rho^2)$ 保持符号不变，因此在整个区间中如下不等式：

$$g(\rho^2) < 0, \quad g(\rho^2) > 0 \tag{21}$$

有一个成立．设

$$\varphi = t, \quad \rho = \rho(t, u) \tag{22}$$

是方程组 (20) 以 $t = 0$, $\varphi = 0$, $\rho = u$ 为初始值的解，其中 $u_1 < u < u_2$．根据在 § 15 例题 1 中的证明，函数 $\rho(t, u)$ 对所有 t 有定义，且当 $t \to +\infty$ 时趋近于区间 $u_1 < \rho < u_2$ 的一个端点，而当 $t \to -\infty$ 时趋近于区间的另一个端点．从此得出，当 $t \to +\infty$ 和 $t \to -\infty$ 时轨线 (22) 盘旋逼近于圆周 K_{u_1}, K_{u_2}．这就意味着，如果不等式 (21) 的第一式成立，那么轨线 (22) 当 $t \to +\infty$ 时盘旋逼近于 K_{u_1}，而当 $t \to -\infty$ 时盘旋逼近于 K_{u_2} (图 50)．如果满足 (21) 式中的第二个不等式，那么解 (22) 当 $t \to -\infty$ 时盘旋逼近于 K_{u_1}，而当 $t \to +\infty$ 时盘旋逼近于 K_{u_2} (图 51)．于是，环 Q 被两种类型之一的螺旋线所充满，到底是哪种类型的螺旋线，这就要取决于在区间 $u_1 < \rho < u_2$ 上 (21) 式中是哪一个不等式成立．如果集合 N 是有界的，且 u^* 是它的上界，那么在无限区间 $u^* < \rho < +\infty$ 上轨线 (22) 的一端是盘旋逼近于 K_{u^*} 的，而另一端则趋于无限．

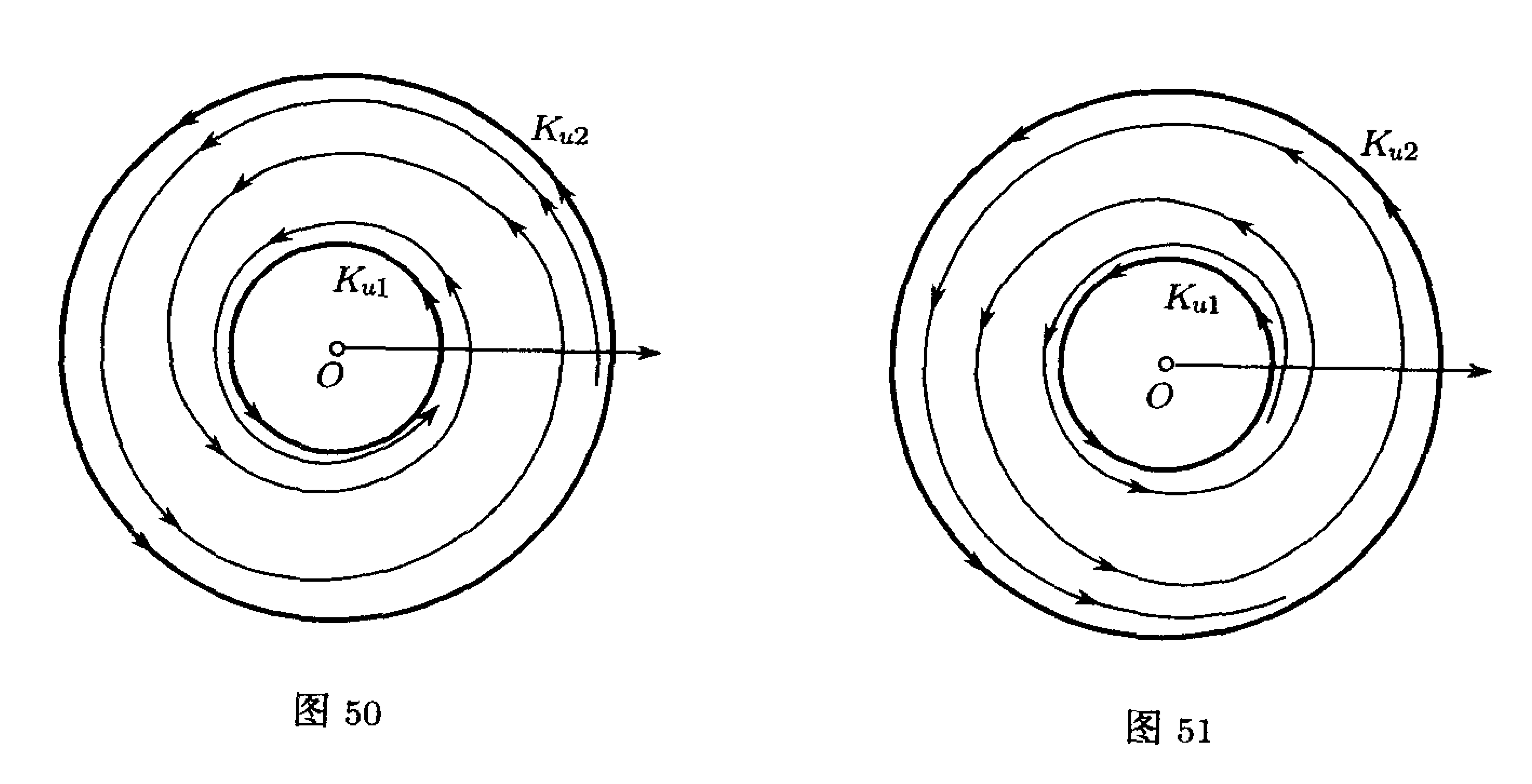


图 50　　图 51

如果点 u_0 是集合 N 的孤立点，那么闭轨 K_{u_0} 就是极限环，它的形式取决于邻接 K_{u_0} 的充满环中的螺旋线类型．如果点 u_0 不是集合 N 的孤立点，那么周期解 K_{u_0} 不是极限环．如果这时集合 N 含有以 u_0 为中心的整个区间，那么周期解 K_{u_0} 整个被包含在某一个周期解族中，这个周期解族是由以坐标原点为共同中心的同心圆组成的．如果数 u_0 在一边邻接于集合 N 中的一个区间，另一边邻接于 D 中的区间，那么

轨线 K_{u_0} 是在一侧邻接它的一族闭轨的边界, 而在它的另一侧是一族轨线盘旋逼近于它. 但是邻接于周期解 K_{u_0} 的闭轨还可能有更复杂的情形. 它们是不难想像的, 例如, N 可以是康托尔 (Cantor) 完全集.

现在我们在笛卡儿坐标下写出方程组 (20), 即令

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi. \tag{23}$$

将关系式 (23) 两边对 t 求导, 我们得到:

$$\begin{cases} \dot{x} = \dot{\rho}\cos\varphi - \rho\dot{\varphi}\sin\varphi = \rho g(\rho^2)\cdot\dfrac{x}{\rho} - \rho\cdot\dfrac{y}{\rho} = xg(x^2+y^2) - y; \\ \dot{y} = \dot{\rho}\sin\varphi + \rho\dot{\varphi}\cos\varphi = \rho g(\rho^2)\cdot\dfrac{y}{\rho} + \rho\cdot\dfrac{x}{\rho} = yg(x^2+y^2) + x. \end{cases} \tag{24}$$

因此, 在笛卡儿坐标中, 方程组 (20) 写成形式:

$$\dot{x} = xg(x^2+y^2) - y, \quad \dot{y} = yg(x^2+y^2) + x. \tag{25}$$

(其中函数 g, 例如, 可以是任意的多项式.) 坐标原点是方程组 (25) 的平衡位置.

2. 设

$$\dot{x}^1 = f^1(x^1, x^2, \mu), \quad \dot{x}^2 = f^2(x^1, x^2, \mu)$$

是标准的二阶自治方程组, 它的右端依赖于数值参数 μ, 且关于变量 x^1, x^2, μ 有连续的一阶偏导数. 其次令

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \mu) \tag{26}$$

为这个方程组的向量写法. 方程组 (26) 以 $0, \boldsymbol{\xi}$ 为初始值的解记为 $\boldsymbol{\varphi}(t, \boldsymbol{\xi}, \mu)$; 假设 $\boldsymbol{\varphi}(t, \boldsymbol{\xi}_0, \mu_0)$ 是方程 (26) 当 $\mu = \mu_0$ 时以 T 为周期的周期解. 我们来弄清楚当参数 μ 在值 μ_0 附近变化时产生周期解的问题.

不论参数 μ 的数值如何, 我们都将在同一个平面 P 上来描述方程 (26) 的解. 设 K 是对应于解 $\boldsymbol{\varphi}(t, \boldsymbol{\xi}_0, \mu_0)$ 的闭轨线, 而 L 是在平面 P 上由参数的向量方程

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\psi}(u)$$

给出的光滑曲线, 它与轨线 K 相交于唯一的一点

$$\boldsymbol{\xi}_0 = \boldsymbol{\varphi}(0, \boldsymbol{\xi}_0, \mu_0) = \boldsymbol{\varphi}(T, \boldsymbol{\xi}_0, \mu_0) = \boldsymbol{\psi}(u_0), \tag{27}$$

且与 K 不相切. 我们考察向量方程:

$$\boldsymbol{\varphi}(t, \boldsymbol{\psi}(u), \mu) - \boldsymbol{\psi}(v) = 0, \tag{28}$$

其中 μ, u 是自变量, 而 t 和 v 是未知函数. 设自变量 u 在 u_0 附近而 μ 在 μ_0 附近变化. 所找的解将是 t 在 T 附近, v 在 u_0 附近时的解. 当 $u = u_0$, $\mu = \mu_0$ 时方

程 (28) 显然有解: $t = T, v = u_0$ (见 (27)), 且由于向量 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\xi}_0, \mu_0)$ 和 $\psi'(u_0)$ 无关, 因此相应于方程组的函数行列式在这些值处不等于零. 当 $\mu = \mu_0$ 时方程 (28) 确定了方程 (26)($\mu = \mu_0$) 在闭轨 K 附近的后继函数 $v = \chi(u, \mu_0)$. 当 μ 在 μ_0 附近时, 函数 $v = \chi(u, \mu)$ 也由方程 (28) 确定, 且可以认为是方程 (26) 在周期解 K 附近的**后继函数**. 但是方程 (26) 当 $\mu \neq \mu_0$ 时也可能没有周期解. 为了寻求方程 (26) 当 μ 靠近 μ_0 时的周期解, 我们讨论关于变量 μ 的未知函数 $u(\mu)$ 的方程

$$\chi(u, \mu) - u = 0. \tag{29}$$

如果方程 (29) 的左端关于变量 u 的导数当 $\mu = \mu_0$, $u = u_0$ 时不等于零, 亦即如果

$$\frac{\partial}{\partial u}\chi(u_0, \mu_0) \neq 1, \tag{30}$$

那么方程 (29) 显然有可微解 $u(\mu)$, 这时方程 (26) 当 μ 靠近 μ_0 时有唯一的周期解, 它光滑地依赖于 μ, 且当 $\mu = \mu_0$ 时变成 K. 条件 (30) 意味着环 K **粗性**的假设. 在所得到的结果中也包含了使用术语 "粗的" 的理由. 当方程组的右端作很小的变动时粗的极限环**不消失**(且仍然是粗的), 它在这样变动时是 " 结实的".

如果方程

$$v = \chi(u, \mu) \tag{31}$$

当 $\mu = \mu_0$ 时在变量 u, v 平面上的图形与角平分线

$$v = u \tag{32}$$

在点 (u_0, u_0) 处有一阶相切 (图 52(b)), 那么曲线 (31) 当 $\mu = \mu_0$ 时位在角平分线 (32) 的一侧, 而且极限环 K 是半稳定的 (图 53(b)). 当参数 μ 在 μ_0 附近变动时, (31) 图形的最自然状态是: 当 μ 在 μ_0 的一侧时 (31) 和 (32) 的图形完全没有交点 (图 52(a)), 而当 μ 在 μ_0 的另一侧时, 这些图形出现**两**个交点 (图 52(c)), 因此方程 (26) 在 K 附近出现两个粗极限环 (图 53(c)). 于是, 当参数 μ 通过值 μ_0 时, 我们开始没有极限环 (图 53(a)), 然后当 $\mu = \mu_0$ 时出现一个半稳定的极限环, 当参数 μ 进一步变化时它分

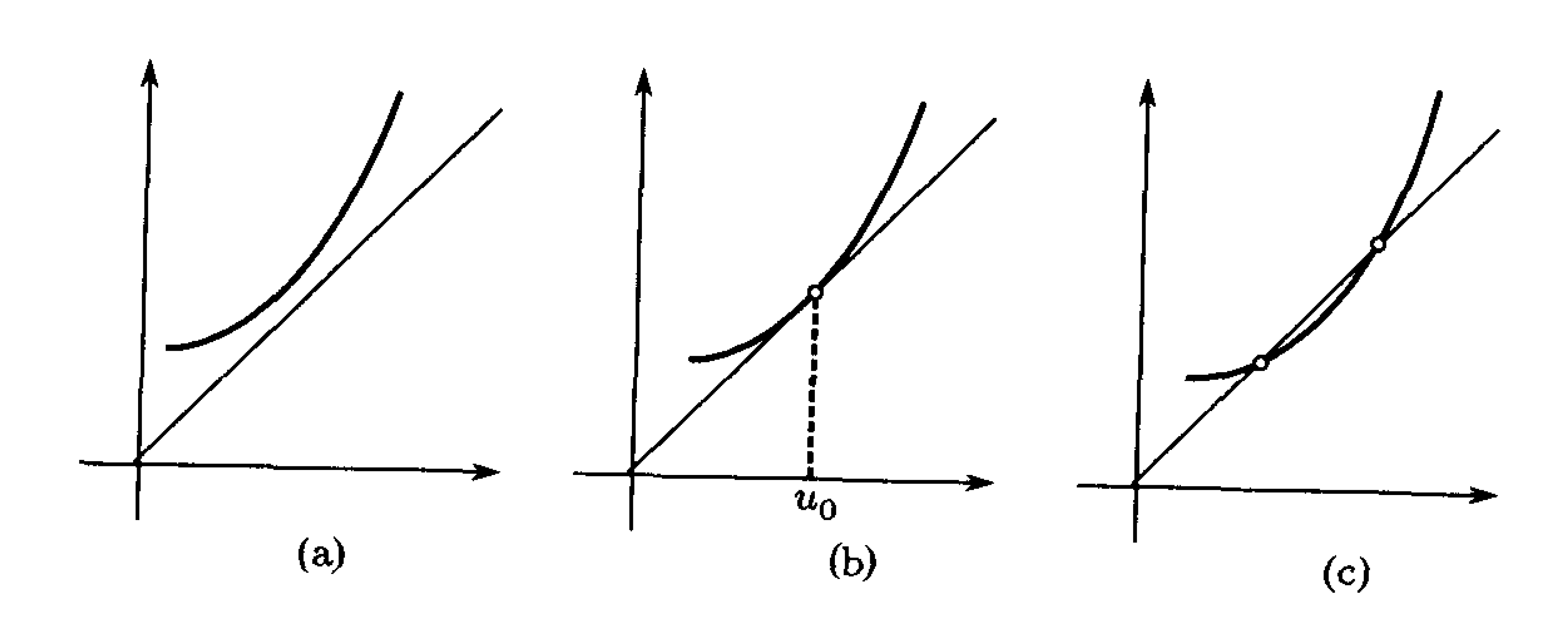


图 52

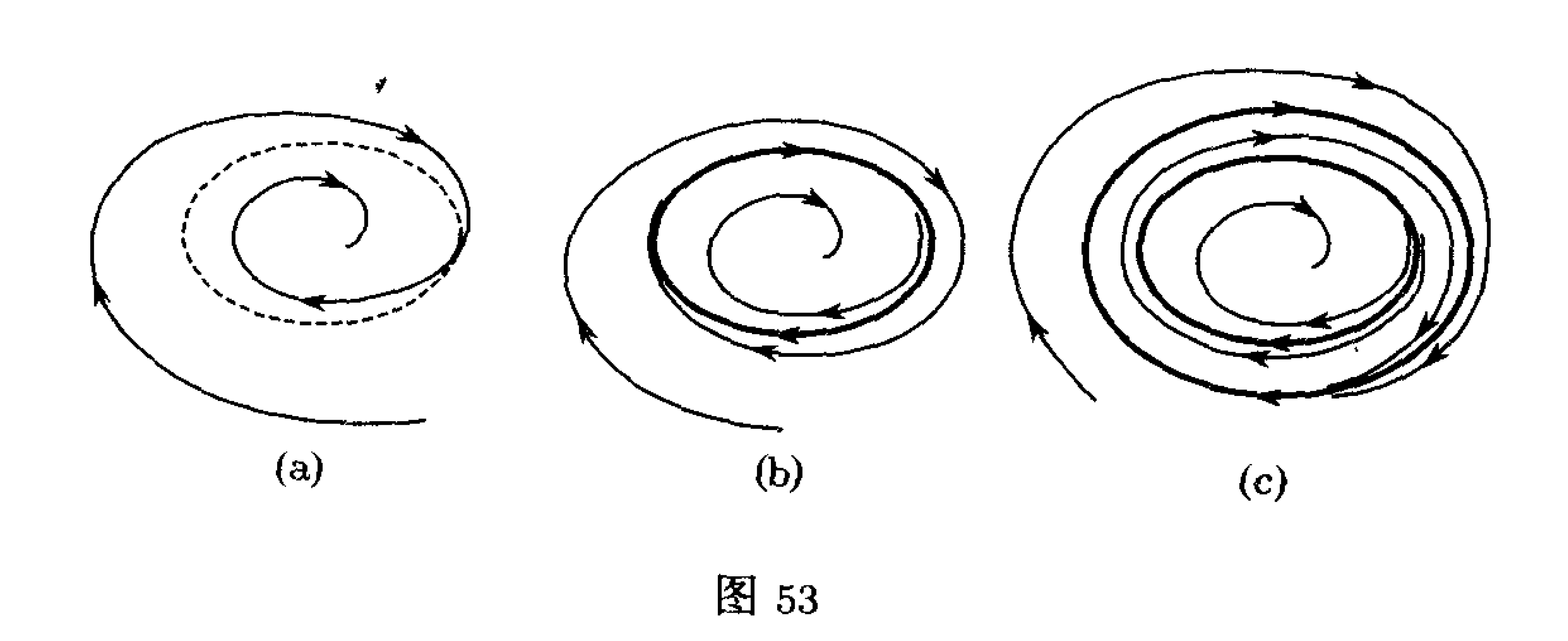


图 53

裂成为两个靠近 K 的粗极限环. 所描述的现象通常称为方程组 (26) 当其右端变化时极限环的"产生".

3. 我们注意到当方程的右端是解析函数时, 方程 (2) 的周期解 K 有一些十分重要的性质. 这里我们要不加证明地利用这样的事实, 即在这种情况下方程 (2) 的解 $\boldsymbol{\varphi}(t,\boldsymbol{\xi})$ 是变量 t, ξ^1, ξ^2 的解析函数. 当构造后继函数时, 我们将认为曲线 L 是用解析方程给出的. 在这些假设下, 后继函数 $\chi(u)$ 由于是解析方程的解, 因而是解析的.

因为函数 $\chi(u)-u$ 的零点对应于方程 (2) 的周期解, 所以根据函数 $\chi(u)$ 的解析性, 只有两种互相彼此排斥的可能情形: (1) 当 u_0 是函数 $\chi(u)-u$ 的孤立零点时, K 是极限环的情形; (2) 当函数 $\chi(u)-u$ 恒等于零时, 周期解 K 被包含在周期解族内部的情形. 如果有任何另一条轨线盘旋逼近于 K, 那么 K 就不被包括在周期解族的内部, 因而是极限环. 这样一来, 当方程的右端函数是解析时, 定理 21 中情形 (2) 的周期解 K 就是极限圈环.

§29. 电子管振荡器

这里概括地描述了最简单的电子管振荡器 —— 一种周期 (不衰减) 电子振动源的仪器, 并给出振荡器工作的定性数学理论. 描述电子管振荡器工作的方程是非线性的, 它的极限环也对应于振荡器所激发的周期振动. 极限环的数学概念与由电子管振荡器激发的不衰减振动的物理概念的一致性, 首先是由著名的前苏联学者 A. A. 安德罗诺夫 (A. A. Андронов) 建立的. 在安德罗诺夫的研究以前, 人们企图用线性微分方程来说明电子管振荡器的工作, 但不能给出振荡器工作的正确数学描述.

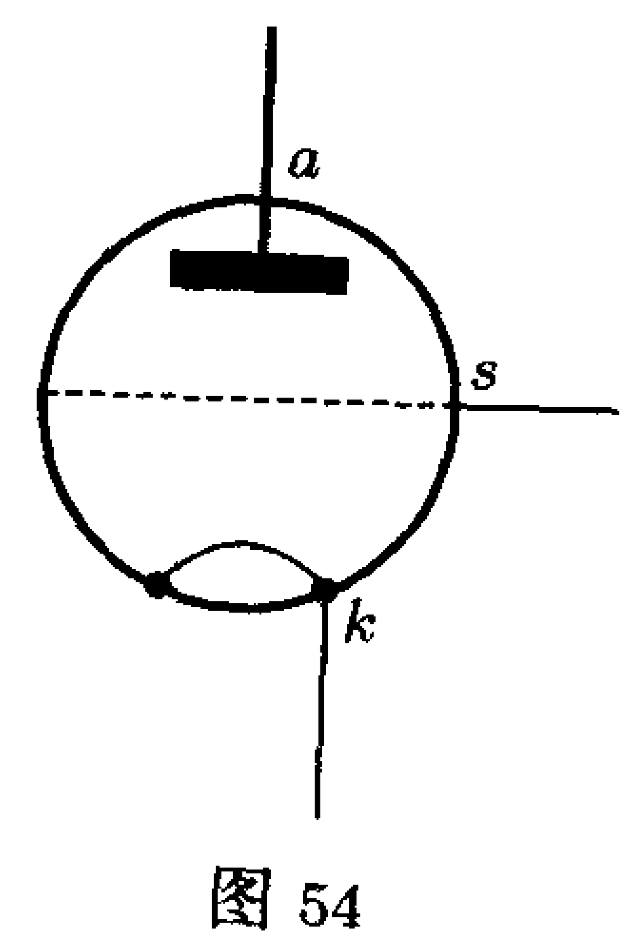


图 54

(A) 三极管(电子管的一种) 是三端网络 aks. 三极管的约定记号如图 54 所表示. 其中 a 是阳极, k 是阴极, s 是栅极. 在栅极 s 和阴极 k 之间加有电位差 U_s(栅压), 可是在 s 与 k 之间**没有**电流; 从阳极 a 到阴极 k 经过电子管流动的电流是 I_a(阳极电流). 支配三极管工作的规律由公式

$$I_a = f(U_s) \tag{1}$$

来描述. 函数 f 称为三极管的**特性**函数. 假设它是单调增加的正函数, 并满足条件:

$$\lim_{U_s\to-\infty} f(U_s)=0\,,\quad \lim_{U_s\to+\infty} f(U_s)=I_N\,,$$

其中 I_N 是三极管的饱和电流 (图 55). 通常还假设函数 $f'(U_s)$ 在 $U_s=0$ 处达到最大值.

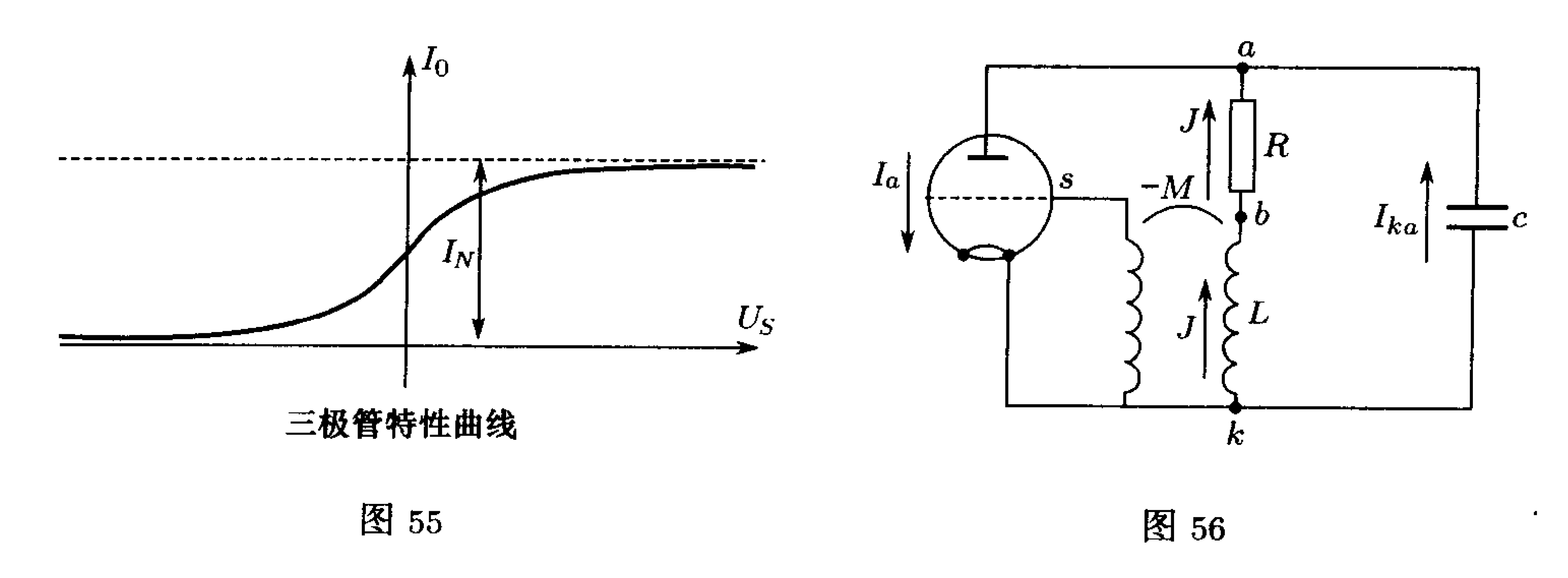


图 55　　图 56

在 (A) 中所描述的三端网络三极管的名称下, 实际上除了电子管外其中还包括阳极电池组、栅极偏压电池组以及阴极灯丝电池组.

(B) 在阳极回路中含有振动回路的电子管振荡器具有下面的结构 (图 56) : 它有四个节点 a, k, s, b, 它由以 $f(U_s)$ 为特性函数的三极管 aks (见 (A)) 、以 C 为电容的电容器 ak 、其量值为 R 的电阻 ab 、其量值为 L 的电感 bk 以及还有一个没有量值的电感 sk 所组成. 电感 kb 和 ks 之间以负的互感 $-M(M>0)$ 相联系, 它在电子管振荡器中实现了所谓的负反馈. 如果以 J 表示通过电阻 ba, 或者同样地通过自感 kb 的电流强度:

$$J=I_{ba}=I_{kb}\,,$$

那么可以证明, 量 J 作为时间 t 的函数满足下面的微分方程:

$$L\ddot{J}+R\dot{J}+\frac{J}{C}=\frac{1}{C}f(M\dot{J})\,. \tag{2}$$

现在推导方程 (2). 根据基尔霍夫第一定律, 我们有:

$$J+I_{ka}=I_a\,, \tag{3}$$

其中 I_{ka} 是通过电容器 ka 的电流, 此外, 根据三极管的性质有:

$$I_{sk}=0\,. \tag{4}$$

应用基尔霍夫第二定律于振动回路 $kbak$, 我们得到 (见 (4)) :

$$L\dot{I}_{kb}+RI_{ba}+\frac{1}{C}\int I_{ak}dt=0\,.$$

求导这个关系式, 得到

$$L\ddot{I}_{kb}+R\dot{I}_{ba}+\frac{1}{C}I_{ak}=0\,. \tag{5}$$

由于在电感 kb 和 ks 之间的互感, 我们得到 (见 (4) 以及 § 13, (B)) :

$$U_s=M\dot{I}_{kb}\,. \tag{6}$$

于是, 由关系式 (1), (3), (5), (6) 就得到 (2) .

(C) 在变量 J, $\dot{J}$ 的相平面上, 方程 (2) 有唯一的平衡位置, 其坐标为

$$J=f(0),\quad \dot{J}=0\,. \tag{7}$$

如果

$$R>\frac{M}{C}f'(0)\,, \tag{8}$$

那么这个平衡位置是渐近稳定的; 如果

$$R<\frac{M}{C}f'(0)\,, \tag{9}$$

那么它是完全不稳定的 (见 § 26, (F)). 在变量 J, $\dot{J}$ 平面上的无穷远点在任何情况下都是完全不稳定的, 这就是说, 在平面 J, $\dot{J}$ 上存在这样大的圆 K , 使得方程 (2) 的任何轨线从某一时刻进入 K 之后, 就不再跑出 K . 当满足不等式 (9) 时, 平衡位置 (7) 也是完全不稳定的. 因此, 根据定理 21 (见 § 28), 任何不是平衡位置 (7) 的轨线的 ω-极限集合都是闭轨, 总之, 在满足不等式 (9) 的情况下, 电子管振荡器是周期不衰减的电子振动源.

注　当适当选择特征函数 f 时, 方程 (2) 有**唯一的**极限环, 而方程 (2) 所有其余的轨线, 只要不是平衡位 (7) , 都盘旋地逼近于它. 在例题中将给出一个具有这种性质的特征函数.

为了证明命题 (C) , 代替未知函数 J 我们引进新的未知函数 x :

$$J=x+f(0)\,, \tag{10}$$

使得点 (7) 对应于 x, $\dot{x}$ 平面的坐标原点.

作变量替换 (10) 后, 从方程 (2) 得到方程

$$\ddot{x}+\frac{R}{L}\dot{x}+\frac{1}{LC}x=\frac{1}{LC}[f(M\dot{x})-f(0)]\,. \tag{11}$$

用 $g(\dot{x})$ 表示这个方程右端的变量 $\dot{x}$ 的函数. 直接看出, g 是有界单调增加的函数, 而且只在变量等于零时才变为零 (图 57). 在上式中再令

$$\frac{R}{L}=2\delta,\quad \frac{1}{LC}=\omega^2\,,$$

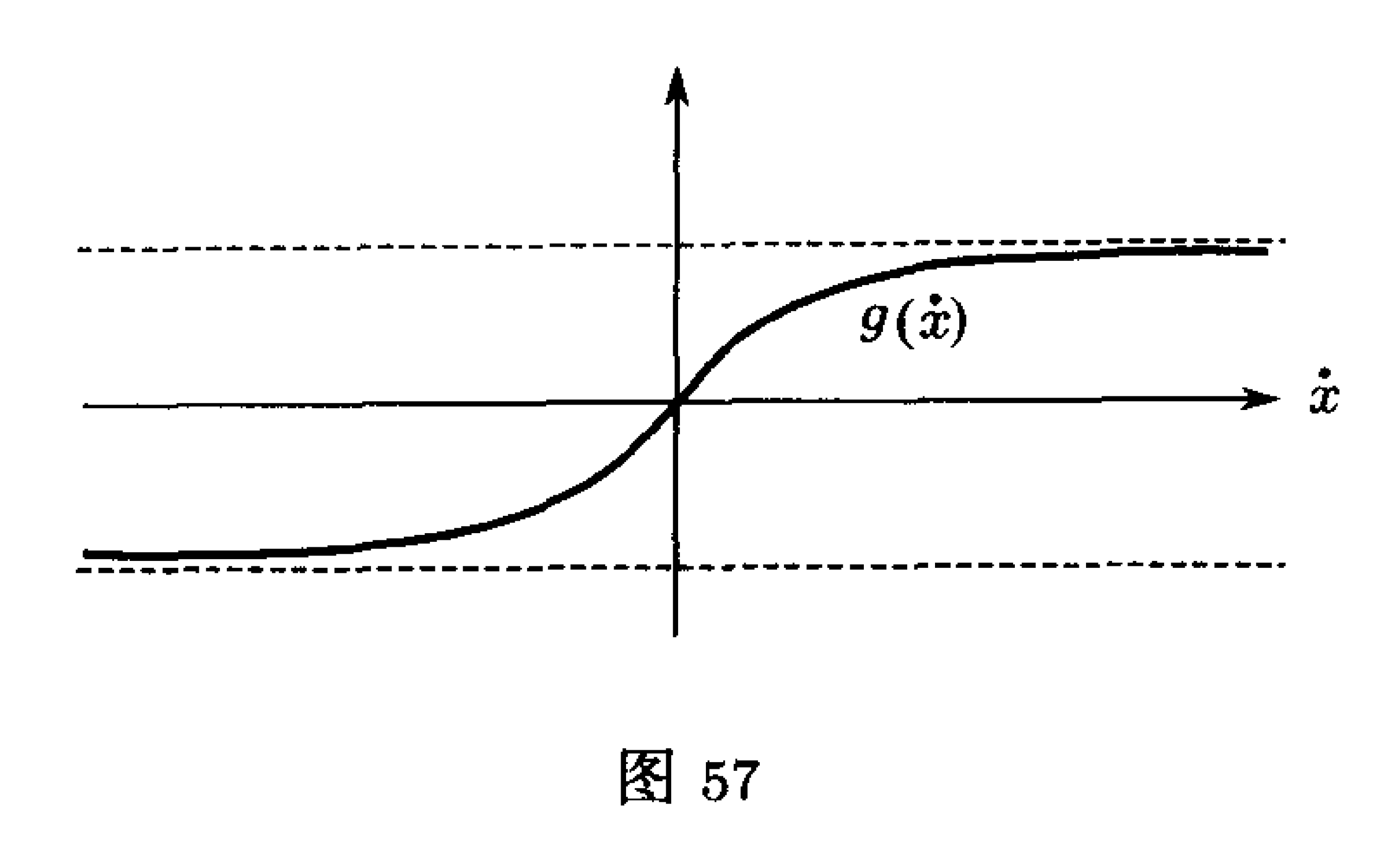


图 57

于是我们把方程 (11) 写成形式:

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega^2 x = g(\dot{x}) .$$

引进新的变量 $y = \dot{x}$ 之后, 从这个方程得到标准方程组:

$$\begin{cases} \dot{x} = y , \\ \dot{y} = -\omega^2 x - 2\delta y + g(y) . \end{cases} \tag{12}$$

为了找到方程组 (12) 的平衡位置, 我们令它的右端等于零:

$$\begin{cases} y = 0 , \\ -\omega^2 x - 2\delta y + g(y) = 0 . \end{cases}$$

所得方程组有唯一的解

$$x = 0 , \quad y = 0 .$$

因此, 坐标原点是方程组 (12) 唯一的平衡位置, 而由此得出点 (7) 是方程 (2) 的唯一的平衡位置.

现在我们来弄清楚方程组 (12) 的平衡位置 (0,0) 的稳定性条件. 为此, 将这个方程组在点 (0,0) 处进行线性化. 我们得到方程组

$$\begin{cases} \dot{x} = y , \\ \dot{y} = -\omega^2 x - 2\delta y + g'(0) y . \end{cases} \tag{13}$$

简单的计算给出线性方程组的特征多项式:

$$\lambda^2 + (2\delta - g'(0))\lambda + \omega^2 .$$

在新的记号下, 对应于条件 (8) 和 (9) 是取形式: $2\delta > g'(0)$, $2\delta < g'(0)$ 的条件. 因此, 当满足条件 (8) 时, 平衡位置 (0,0) 是渐近稳定的 (见定理 19 以及 § 9, (B)), 而当满足条件 (9) 时, 它是完全不稳定的 (见 § 26, (F)).

为了搞清楚方程组 (12) 的轨线在 x, y 相平面上无穷远点处的性态, 我们考察线性方程组:

$$\begin{cases} \dot{x} = y\,, \\ \dot{y} = -\omega^2 x - 2\delta y\,, \end{cases} \tag{14}$$

它是由方程组 (12) 丢掉在整个平面上都是有界的项 $g(y)$ 而得到的. 容易算出, 方程组 (14) 的特征多项式是:

$$\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega^2\,. \tag{15}$$

由于数 2δ 和 ω^2 都是正的, 所以 (15) 的根均有负实部. 于是, 根据 § 26 命题 (E), 对于线性方程组 (14) 来说, 存在满足条件:

$$\dot{W}_{(14)}(x,y) \leqslant -\beta W(x,y) \tag{16}$$

的李雅普诺夫函数 $W(x,y)$. 现在计算函数 $W(x,y)$ 基于方程组 (12) 的导函数 $\dot{W}_{(12)}(x,y)$, 我们有

$$\dot{W}_{(12)}(x,y) = \dot{W}_{(14)}(x,y) + \frac{\partial W(x,y)}{\partial y} \cdot g(y)\,. \tag{17}$$

因为函数 $g(y)$ 是有界的, 所以有不等式

$$\left|\frac{\partial W(x,y)}{\partial y} \cdot g(y)\right| \leqslant \gamma\sqrt{W(x,y)} \tag{18}$$

成立 (见 § 26 的公式 (14)), 其中 γ 是某一个正常数.

现在令

$$c = \frac{2\gamma}{\beta}, \quad \alpha = \frac{\beta}{4},$$

从 (16), (17) 和 (18) 我们得到不等式

$$\dot{W}_{(12)}(x,y) \leqslant -2\alpha W(x,y), \quad 当\ W(x,y) \geqslant c^2\,. \tag{19}$$

方程

$$W(x,y) = c^2 \tag{20}$$

在 x, y 平面上确定了一个椭圆. 从不等式 (19) 立即推出, 当点 (x,y) 属于椭圆 (20) 时, 沿着方程组 (12) 过点 (x,y) 的轨线函数 $W(x,y)$ 的值是递减的. 因此, 方程组 (12) 的所有与椭圆 (20) 相交的轨线都进入这个椭圆的内部. 如果

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t) \tag{21}$$

是方程组 (12) 从椭圆 (20) 外面的点 (ξ, η) 出发的解, 令

$$w(t) = W(\varphi(t), \psi(t)),$$

那么对于函数 $w(t)$ 来说, 当条件

$$w(t) \geqslant c^2$$

成立时, 我们得到不等式

$$\dot{w}(t) \leqslant -2\alpha w(t)\,, \tag{22}$$

是正确的. 积分不等式 (22) 得到

$$W(\varphi(t), \psi(t)) \leqslant W(\xi, \eta)\exp(-2\alpha t).$$

由此得出, 轨线 (21) 必须进到椭圆 (20) 的中. 这时, 因为在它的边界点处, 所有轨线都进入其内部, 所以任何一条轨线都不可能走出这个椭圆.

现在设 K 是 x, y 平面上包含椭圆 (20) 的某个圆周. 从上述证明推出, 方程组 (12) 任何不是平衡位置 (0,0) 的轨线最终必定进入圆周 K 的内部, 并且以后就不离开它. 因为点 (0,0) 是完全不稳定的, 所以任何一条轨线不可能以原点为它的 ω-极限点, 因此根据定理 21 (见 §28), 它或者是盘旋逼近于周期解的轨线, 或者它本身就是周期解.

于是命题 (C) 得证.

例题

首先对电子管振荡建立非线性方程 (2) 的安德罗诺夫曾经考虑过这样的情形, 即三极管的特征函数 f 具有特别简单的形式: 就是当自变量取负值时它等于零, 而当自变量取正值时它等于正常数 b. 假设 $f(0) = \dfrac{b}{2}$, 并进行变量替换 (10), 我们推出方程 (12), 其中函数 $g(y)$ 是由下式确定:

$$g(y) = \begin{cases} -\omega^2 a\,, & \text{当 } y < 0 \text{ 时}, \\ \omega^2 a\,, & \text{当 } y > 0 \text{ 时}, \end{cases} \tag{23}$$

其中 $a = \dfrac{b}{2}$. 因此, 用这种方法选取间断函数 $g(y)$ 的方程组 (12) 当 $y > 0$ 时, 即在上半平面, 可写成形式:

$$\begin{cases} \dot{x} = y\,, \\ \dot{y} = -\omega^2 x - 2\delta y + \omega^2 a\,, \end{cases} \tag{24}$$

而当 $y < 0$ 时, 即在下半平面, 它可写成形式:

$$\begin{cases} \dot{x} = y\,, \\ \dot{y} = -\omega^2 x - 2\delta y - \omega^2 a\,. \end{cases} \tag{25}$$

我们将假设多项式 (15) 的根是复数, 所以方程 (14) 的平衡位置 (0,0) 是稳定焦点 (见 §16,(C)); 方程组 (24) 和 (25) 是方程组 (14) 经过平移得到的, 它们的平衡位置不再像在方程组 (14) 那样是坐标原点, 而在方程组 (24) 中是点 $(a, 0)$, 在方程组 (25) 中

是点 $(-a,0)$. 我们注意到方程组 (14) 的螺旋形轨线是**按顺时针方向**盘旋趋向于平衡位置 $(0,0)$ 的, 且当走了螺旋线的半圈后相点就接近于坐标原点, 因此它最初到坐标原点的距离乘上了某一数 $\lambda < 1$, 这里 λ 与点的初始位置无关 (见 §16,(C)).

为了表示出方程组 (12) 本身当 $g(y)$ 由条件 (23) 确定时的相平面, 需要在上半平面布满方程组 (24) 的半圈螺旋形轨线, 而在下半平面布满方程组 (25) 的半圈螺旋形轨线; 而当通过直线 $y=0$ 时, 应该是连续地从一条轨线过渡到另一条轨线. 从方程组 (12) 的这种相图描述出发 (见 (23)), 就可以找出它的闭轨线.

我们来考察方程组 (12) (见 (23)) 在横轴上以 $\xi > 0$ 为坐标的点出发的轨线. 因为在方程组 (12) 的相平面中相点是按顺时针方向进行运动的, 所以从选定的点出发, 轨线就进入下半平面, 从而由方程组 (25) 所支配. 在下半平面经历了半圈螺旋形轨线后, 相点重新到达横轴上以

$$-(a+\lambda(a+\xi)) \tag{26}$$

为坐标的点. 这是由经过半圈螺旋形轨线后, 相点到平衡位置 $(-a,0)$ 的距离乘上数 λ 得出的. 位在横轴上以 (26) 为坐标的点, 以后将按照方程组 (24) 进行运动, 且在上半平面经过半圈螺旋形轨线后, 相点重新到达横轴上以

$$a+\lambda(2a+\lambda(a+\xi)) \tag{27}$$

为坐标的点. 这样一来, 从正半横轴上以 $\xi > 0$ 为坐标的点出发的轨线, 经过一圈后又到达正半横轴上的点, 但是这个点的坐标已是 (27), 因而, 我们得到了正半轴到自身的映射 χ, 它是由下式定义的:

$$\chi(\xi) = a + 2\lambda a + \lambda^2 a + \lambda^2 \xi.$$

函数 $\chi(\xi)$ 是方程组 (12) 的后继函数 (见 (23)). 只有一个满足条件

$$\chi(\xi) = \xi$$

的 ξ 值, 而这一个 ξ 值就对应于方程组 (12) 的极限环, 而且由于 $\chi'(\xi) = \lambda^2 < 1$, 所以它是粗的稳定极限环 (见 §28).

§30. 二阶自治方程组的平衡位置

这里要对二阶标准自治方程组

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,y), \\ \dot{y} = g(x,y), \end{cases} \tag{1}$$

的非退化平衡位置进行分类和研究, 而且假设右端函数是二次连续可微的, 但在定理 23 中我们将假设它们是三次连续可微的.

非退化的平衡位置

因为平衡位置总可以取为坐标原点, 所以我们假设方程组 (1) 所要研究的平衡位置就是坐标原点. 在点 (0,0) 处线性化方程组 (1), 亦即把方程组 (1) 的右端对 x 和 y 进行泰勒级数展开并丢掉二阶项, 就得到线性方程组:

$$\begin{cases} \dot{x} = a_1^1 x + a_2^1 y\,, \\ \dot{y} = a_1^2 x + a_2^2 y\,. \end{cases} \tag{2}$$

设 λ 和 μ 是矩阵 (a_j^i) 的特征值. 如果数 λ 和 μ 彼此不相等, 且它们的实数部分不为零, 那么我们就说方程组 (1) 的平衡位置 (0,0) 是**非退化的**. 线性方程组 (2) 轨线的性态在 § 16 中曾仔细研究过. 我们在这里要证明, 对于非退化的平衡位置, 方程组 (1) 的轨线在平衡位置 (0,0) 附近的性态与方程组 (2) 的轨线在平衡位置 (0,0) 附近的性态实质上是一样的.

对于方程组 (1) 的平衡位置 (0,0), 我们保持在 § 16 中所给出的名称. 如果数 λ 和 μ 两个都是负实数, 就称平衡位置为**稳定的结点**. 如果数 λ 和 μ 两个都是正实数, 就称平衡位置为**不稳定的结点**. 如果数 λ 和 μ 是复数共轭的, 且有负实部, 就称平衡位置为**稳定的焦点**. 如果数 λ 和 μ 是复数共轭的, 且有正实部, 就称平衡位置是为**不稳定的焦点**. 最后, 如果数 λ 和 μ 都是实的且有不同的符号, 就称平衡位置为**鞍点**.

在平衡位置附近, 轨线最简单的性质可以直接由李雅普诺夫定理 (定理 19) 及 § 26 的命题 (F) 来建立. 因此, 我们得到如下命题.

(A) 稳定的结点和稳定的焦点是渐近稳定的平衡位置. 不稳定的结点和不稳定的焦点是完全不稳定的平衡位置.

这个命题在很大程度上已经解决了结点和焦点附近轨线性态的问题. 事实上, 如果已知给出的平衡位置是渐近稳定的, 那么从应用的观点来看, 不管轨线以怎样的方式趋于平衡位置往往不重要了. 关于完全不稳定的平衡位置也有同样的看法. 鞍点完全起了另一种作用: 知道轨线在它附近的性态后, 可以得出在整个平面上有关轨线性态的有价值判断. 同时, 证明在鞍点附近轨线性态的定理要比证明关于结点和焦点的相应定理更为困难得多.

现在我们在方程组 (1) 的相平面上进行坐标的线性变换, 使得它有最简单的形式.

(B) 把方程组 (1) 的右端对 x 和 y 进行准确到二次项的按泰勒级数展开之后, 我们得到:

$$\begin{cases} \dot{x} = a_1^1 x + a_2^1 y + r(x,y)\,, \\ \dot{y} = a_1^2 x + a_2^2 y + s(x,y)\,, \end{cases} \tag{3}$$

其中余项 $r(x,y)$ 和 $s(x,y)$ 以及它们关于 x 和 y 的一阶偏导数在点 $x = 0,\ y = 0$ 处等

于零, 并且可以写成形式:

$$\begin{cases} r(x,y) = r_{11}x^2 + 2r_{12}xy + r_{22}y^2\,, \\ s(x,y) = s_{11}x^2 + 2s_{12}xy + s_{22}y^2\,, \end{cases} \tag{4}$$

而且这些"二次型"的系数 r_{ij} 和 s_{ij} 是变量 x 和 y 的函数, 它们在坐标原点附近有界. 可以证明, 进行从变量 x, y 到变量 ξ, η 的实线性变换可以把方程组 (3) 化成最简单的形式, 这时要分为两种不同的情形: 1° 如果矩阵 (a_j^i) 的特征值 λ, μ 是实的且不相同, 那么关于 ξ 和 η 的方程组可以写成形式:

$$\dot{\xi} = \lambda\xi + \rho(\xi,\eta), \quad \dot{\eta} = \mu\eta + \sigma(\xi,\eta)\,. \tag{5}$$

2° 如果矩阵 (a_j^i) 的特征值是复共轭的, 即有形式 $\mu+i\nu$ 及 $\mu-i\nu$ 时, 那么关于 ξ 和 η 的方程组写为形式:

$$\dot{\xi} = \mu\xi - \nu\eta + \rho(\xi,\eta)\,, \quad \dot{\eta} = \nu\xi + \mu\eta + \sigma(\xi,\eta)\,. \tag{6}$$

在两种情形中, 余项 $\rho(\xi,\eta)$ 和 $\sigma(\xi,\eta)$ 都具有上述对于函数 $r(x,y)$ 及 $s(x,y)$ 的同样性质. 如果取矩阵 (a_j^i) 的特征向量的方向作为新坐标轴的方向, 那么在第一种情况下, 方程组就取 (5) 的形式.

为了证明命题 (B), 只要找出从坐标 x, y 到坐标 ξ, η 的线性变换, 使得线性方程组 (2) 变为最简单的形式就行了. 这样的变换我们已经找到过了 (见 § 14,(F)). 应用同样的变换到方程组 (3), 我们就相应地得到方程组 (5) 或者方程组 (6).

鞍点附近轨线的性态

定理 22 我们假设方程组 (1) 的平衡位置 $O = (0,0)$ 是鞍点. P 是过点 O 的直线, 它的方向是矩阵 (a_j^i) 负特征值对应的特征向量方向, Q 是过原点 O 的另一根直线, 它的方向是矩阵 (a_j^i) 正特征值对应的特征向量方向. 于是(图 58) 正好存在方程组 (1) 的两根轨线 U_1 和 U_2, 它们当 $t \to +\infty$ 时渐近地趋向于点 O, 这两根轨线与点 O 一起组成一条根在点 O 处与直线 P 相切的连续可微曲线 U. 同样, 正好存在方

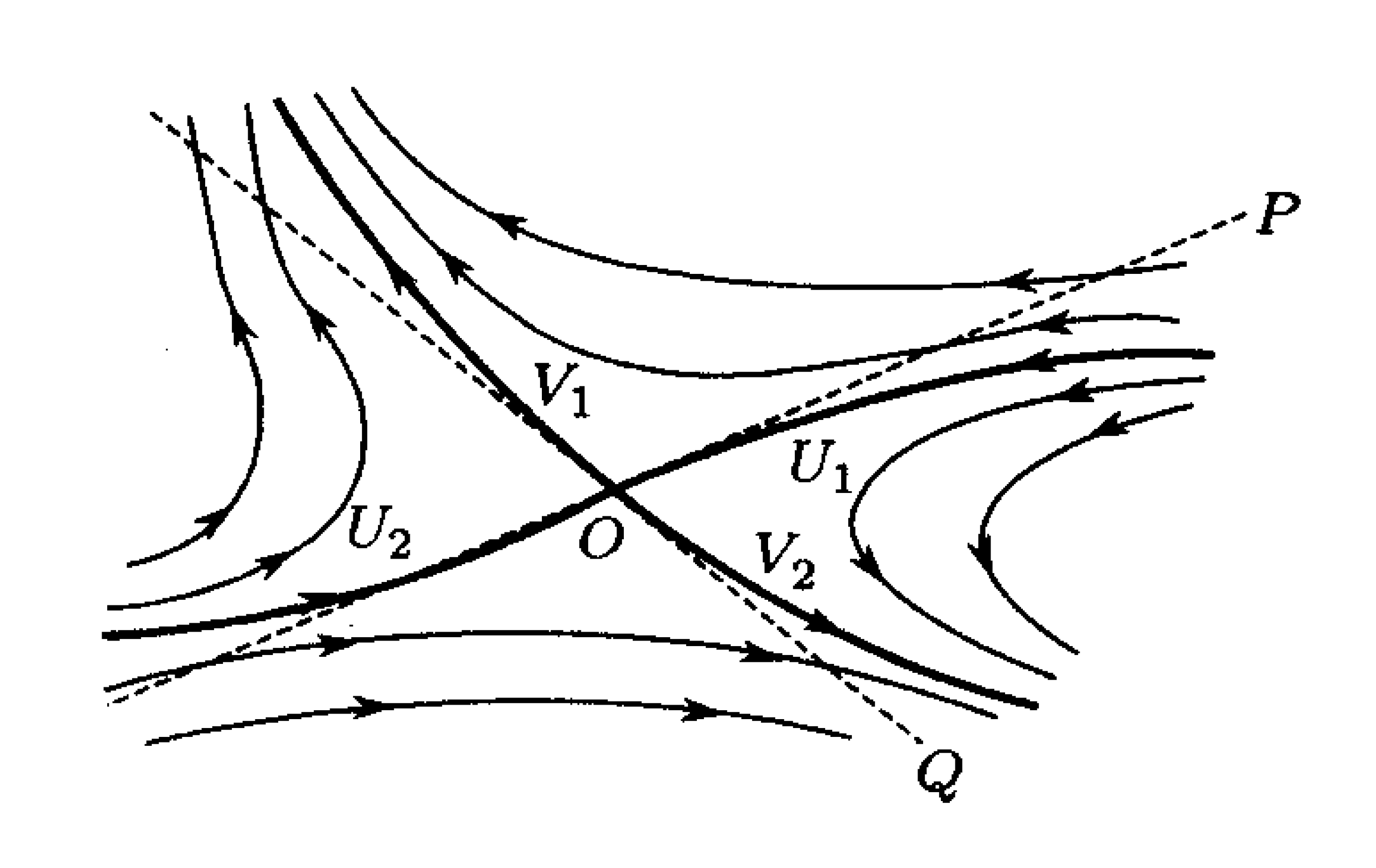


图 58

程组 (1) 的两根轨线 V_1 和 V_2，它们当 $t \to -\infty$ 时渐近地趋向于点 O，这两根轨线与点 O 一起组成一根在点 O 处与直线 Q 相切的连续可微曲线 V．至于方程组 (1) 其余经过点 O 附近轨线的性态大体上和线性方程组的情形相同(见 § 16)．轨线 U_1 和 U_2 称为鞍点 O 的**稳定分界线**，V_1 和 V_2 称为鞍点 O 的**不稳定分界线**．

证明．我们首先取直线 P 作为横轴，而取直线 Q 作为纵轴；那么方程组 (1) 写为形式 (5)．再用 x 和 y 来代替 ξ 和 η，我们得到方程组

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,y) = \lambda x + r(x,y), \\ \dot{y} = g(x,y) = \mu y + s(x,y), \end{cases} \tag{7}$$

其中 $r(x,y)$ 和 $s(x,y)$ 有形式 (4)；而 $\lambda < 0$, $\mu > 0$．对于今后我们注意到，在下面的证明中，我们只用到方程组 (7) 右端的如下性质：右端函数对 x 和 y 的连续可微性，以及函数 r_{ij} 和 s_{ij} (见 (4)) 在坐标原点附近的有界性．

证明分成两个主要部分：1° 分界线 U_1 的存在性证明，它是过点 O 且当坐标 x 减小时沿着正半横轴的轨线；2° 它的唯一性证明．分界线 U_2 的存在性和唯一性可类似地证明．为了讨论分界线 V_1 和 V_2，只要改变一下时间 t 的符号：这时稳定分界线变成不稳定分界线，不稳定分界线变成稳定分界线．

我们转到分界线 U_1 存在性的证明．为此令

$$\omega(x,y) = y - \alpha x^2, \quad (\alpha > 0);$$

并在 (x,y) 平面上考虑由方程

$$\omega(x,y) = 0 \tag{8}$$

确定的抛物线．抛物线 (8) 把平面分成两个部分：包含正半纵轴的部分称为正部分，另一部分称为负部分．正部分是抛物线的内部．我们首先证明：如果 α 是充分大的正数，而 x 充分小 ($|x| \leqslant \varepsilon$)，那么方程组 (7) 所有与抛物线 (8) 的一段 $|x| \leqslant \varepsilon$ 相交的轨线 (除去平衡位置 O) 从负部分一侧穿向正部分一侧，亦即从外部到内部 (图 59)．为此，我们计算函数 $\omega(x,y)$ 基于方程组 (7) 的导数 $\dot{\omega}_{(7)}(x,y)$．由于方程组 (7)，在抛物线 (8) 的点上，我们有

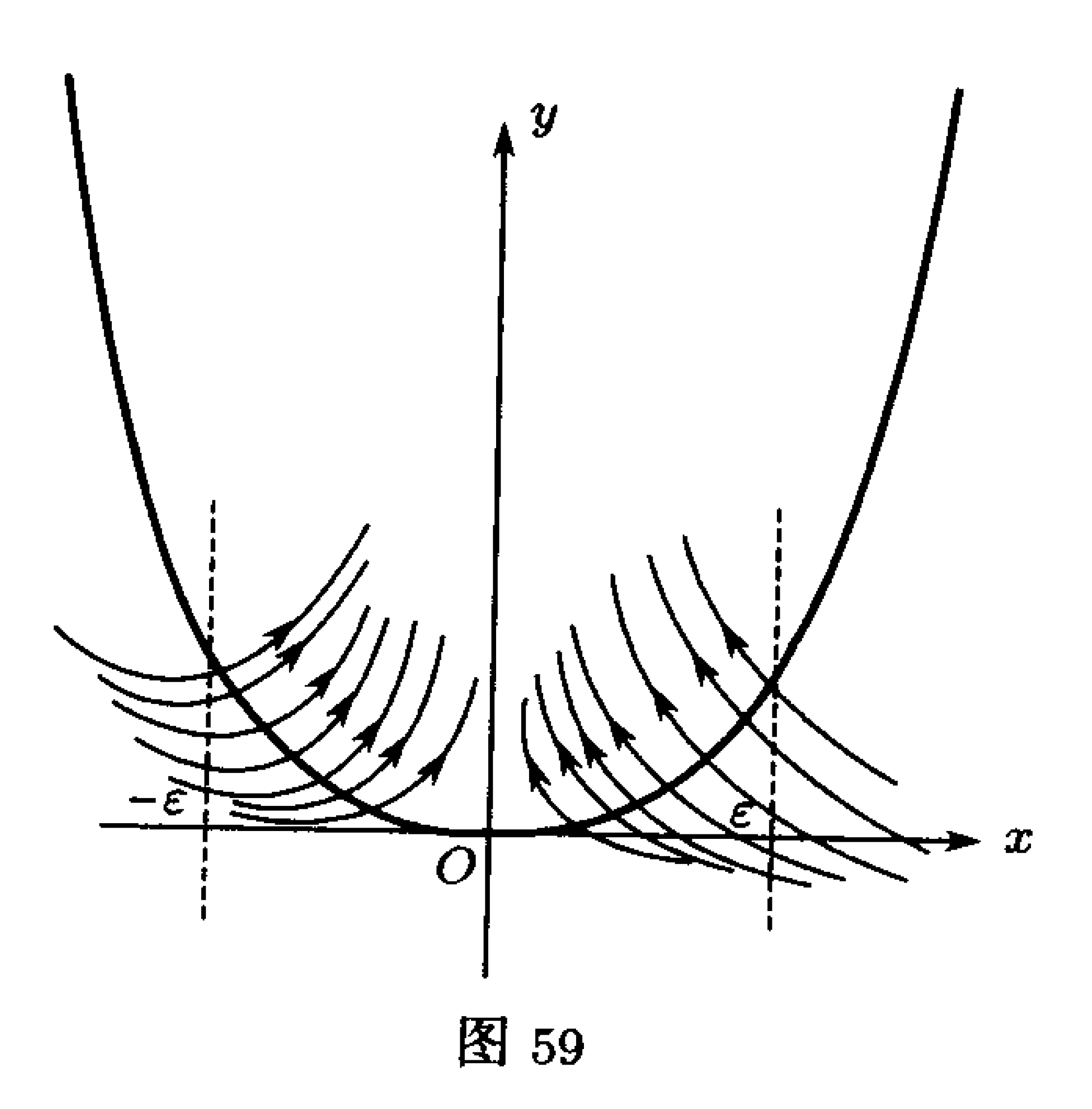


图 59

$$\dot{\omega}_{(7)}(x, \alpha x^2) = \dot{y} - 2\alpha x \dot{x} = \alpha(\mu - 2\lambda)x^2 + s_{11}x^2 + \cdots$$

(其中没有写出的项至少含有 x 的三次幂)．数 $\mu - 2\lambda$ 是正的，而函数 s_{11} 在坐标原点的邻域中是有界的；因此可以选择充分大的数 α，使得

$$\alpha(\mu - 2\lambda) - |s_{11}| > \delta, \quad \delta > 0.$$

略去在 $\dot{\omega}_{(7)}(x,\alpha x^2)$ 表达式中未写出的关于 x 至少是三阶小量的项, 于是存在这样小的正数 $\varepsilon>0$, 使得当 $|x|\leqslant\varepsilon$ 时我们有:

$$\dot{\omega}_{(7)}(x,\alpha x^2)\geqslant 0,$$

而且等式仅当 $x=0$, 亦即在点 O 时成立. 从给出的证明得出, 方程组 (1) 所有与抛物线 (8) 所考虑一段相交的轨线, 除了平衡位置 O 外, 在交点处轨线的方向都是在函数 $\omega(x,y)$ 增加的方向, 也就是从抛物线的外部朝向内部的方向. 同样地证明: 方程组 (7) 所有与抛物线

$$y+\alpha x^2=0 \tag{9}$$

当 $|x|\leqslant\varepsilon$ 时一段相交的轨线, 除了平衡位置 O 外, 在交点处轨线的方向都是从抛物线的外部朝向内部的方向 (抛物线 (9) 的内部含有负半纵轴, 图 60).

令 a 和 b 是直线 $x=\varepsilon$ 分别与抛物线 (8) 和 (9) 的交点. 我们来考察三角形 $[O,a,b]$, 它是由抛物线 (8) 和 (9) 的各一段及直线段 $[a,b]$ 组成的. 如果 ε 充分小, 那么方程组 (1) 所有经过三角形 $[O,a,b]$ 的轨线都是从右向左走的 (图 61), 特别都是从右向左与线段 $[a,b]$ 相交后走进三角形 $[O,a,b]$ 中的. 这从表达式 (见 (7))

$$\dot{x}=\lambda x+r(x,y)$$

当 $0<x\leqslant\varepsilon$, $|y|<\alpha x^2$ 时取负值即可推出; 至于上式为负值是由于 $\lambda<0$, 而 $r(x,y)$ 是 x 和 y 的具有有界系数的 "二次型".

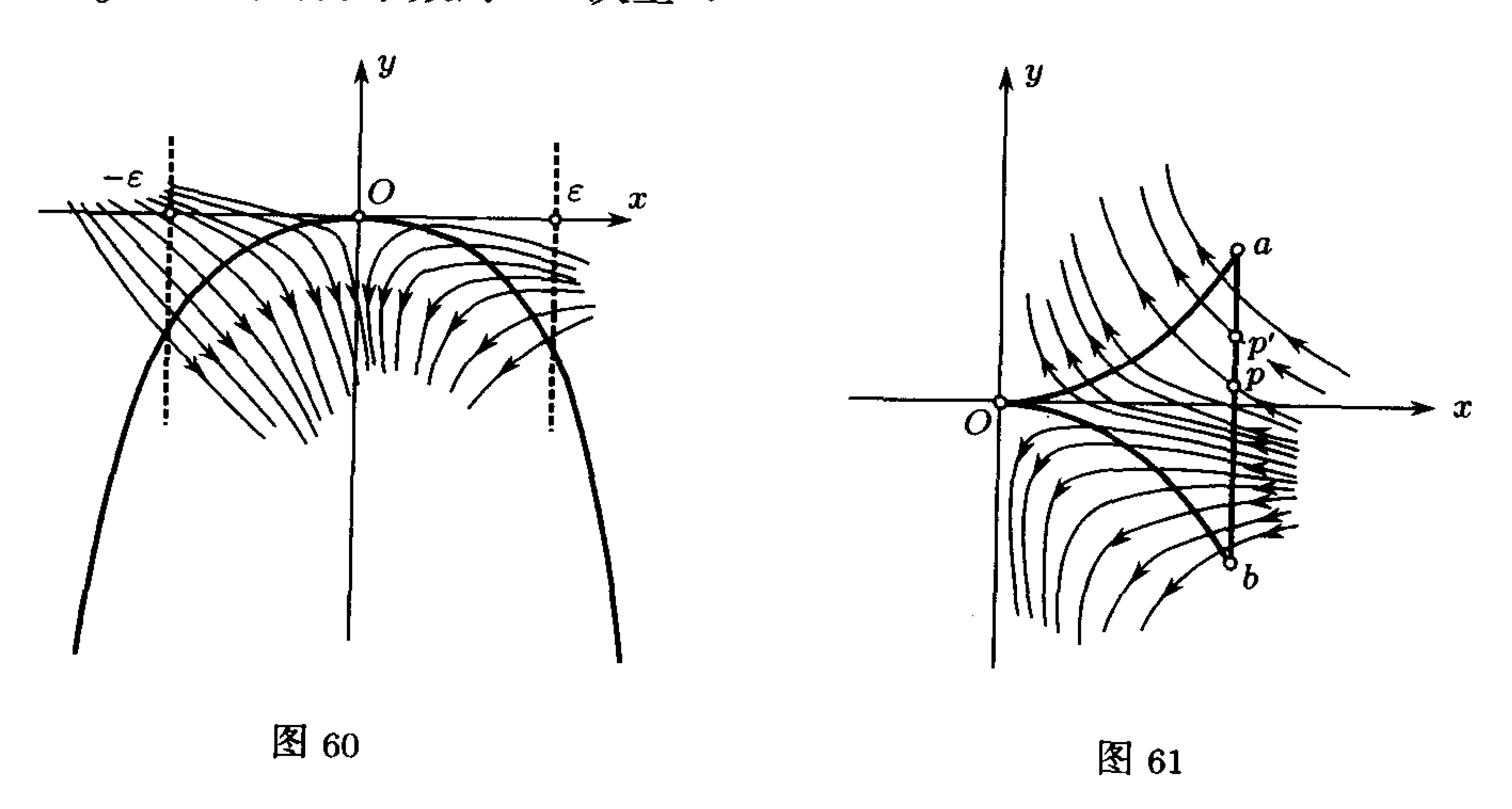


图 60　　　　图 61

令 $\varphi(t,p)$ 是方程组 (7) 当 $t=0$ 时从区间 (a,b) 中的某一点 p 出发的轨线, 这条轨线穿过边 $[a,b]$ 而进入三角形 $[O,a,b]$. 当 t 增加时, 它或者经过抛物线的弧 Oa, Ob 走出三角形, 或者再也不走出三角形. 在后一种情况下, 当 $t\to+\infty$ 时它渐近地趋向于点 O. 从几何上看出, 如果轨线 $\varphi(t,p)$ 通过弧 Oa 走出三角形, 那么当 $p'\in(a,p)$ 时, 轨线 $\varphi(t,p')$ 也通过弧 Oa 走出三角形 (图 61). 其次, 如果轨线 $\varphi(t,p)$ 通过弧 Oa 走出三

角形, 那么根据解对初始值的连续依赖性定理 (§23的定理14和命题(E)), 当p''充分接近于p时, 轨线$\varphi(t,p'')$也通过弧Oa走出三角形. 于是区间(a,b)中所有使得$\varphi(t,p)$ 经过弧Oa走出三角形的点p的集合是组成了某个区间(a,a'). (这个区间非空, 即$a \neq a'$, 这是因为当初始点p充分靠近a时, 从点p出发的轨线显然与弧Oa相交.) 同样, 所有使得$\varphi(t,p)$ 经过弧Ob走出三角形的点p的集合组成区间(b,b'). 区间(a,a')和(b,b')不可能相交, 所以点a'位于b'的上面, 或者在极端的情况下, 它们重合. (事实上是重合的, 但这要求比较复杂的证明.) 于是, 区间$[a',b']$至少含有一个点, 因此存在从区间$[a',b']$上某一点p_0出发的轨线$\varphi(t,p_0)$, 当$t \to +\infty$时, 它渐近地趋向于点O.

轨线$\varphi(t,p_0)$在点(x,y)处的切线斜率是

$$k(x,y) = \frac{\mu y + s(x,y)}{\lambda x + r(x,y)}.$$

因为轨线 $\varphi(t,p_0)$上的点(x,y)位在三角形$[O,a,b]$中, 所以

$$|\, y \,| < \alpha x^2, \quad 0 < x < \varepsilon, \tag{10}$$

由此推出, 数$k(x,y)$仍然有限, 且当$x \to 0$ 时趋于零. 另一方面, 从点O到轨线$\varphi(t,p_0)$ 上点(x,y)连线的斜率$l(x,y)$等于$\dfrac{y}{x}$, 又因为不等式(10)成立, 所以当$x \to 0$时有$l(x,y) \to 0$. 因此, 趋向于点O的曲线$\varphi(t,p_0)$在点O处有连续导数并与横轴相切. 轨线$\varphi(t,p_0)$就是分界线U_1. 沿着负半横轴趋向于点O的分界线U_2也与横轴在点O处相切; 这两根分界线一起组成曲线U, 它的方程为

$$y = u(x), \tag{11}$$

这里$u(x)$是变量x的连续和连续可微的函数, 而且有$u'(0) = 0$.

于是, 稳定分界线U_1和U_2与点O一起组成其方程为(11)的曲线U的存在性就得到了证明. 现在来证明这些分界线的唯一性. 为此, 我们在$(x,\, y)$平面的坐标原点邻域中变换坐标系, 使得曲线(11)成为横轴. 我们用公式

$$y = u(x) + z \tag{12}$$

引进新的未知函数z来代替未知函数y, 就可以达到这个目的. 在方程组(7)中进行变量替换(12), 得到新的方程组

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u(x) + z) = F(x,z), \\ \dot{z} = g(x, u(x) + z) - u'(x) f(x, u(x) + z) = G(x,z), \end{cases} \tag{13}$$

这里的未知函数是x和z. 由于函数$u(x)$有连续导数, 所以函数$F(x,z)$关于两个变量x和z有连续偏导数, 而函数$G(x,z)$对于x是连续的, 而对于z有连续的导数. 但

是 $G(x,z)$ 对于 x 的连续导数还没有建立. 因此对于方程组 (13), 并没有建立要满足通常我们关于方程右端对所有变量是可微函数的连续可微性假设. 但是显然根据 (12), 方程组 (13) 的每一解对应有方程组 (7) 的解, 且反过来也对. 因此, 可以根据方程组 (13) 的轨线性态来判断方程组 (7) 的轨线性态.

方程组 (7) 的稳定分界线 U_1 和 U_2 变为 x, z 平面横轴上的线段, 从而方程组 (13) 有解, 其中函数 z 恒等于零, 而函数 x 用某种方式单调变化且渐近地趋向于零. 由此推出

$$G(x,0) \equiv 0\,.$$

下面 (见 (C)) 要证明函数 $G(x,z)$ 可以写成形式:

$$G(x,z) = zH(x,z)\,, \tag{14}$$

其中函数 $H(x,z)$ 是变量 x 和 z 的连续函数. 根据 $H(x,z)$ 的连续性, 从关系式 (14) 我们得到

$$\left.\frac{\partial G(x,z)}{\partial z}\right|_{\substack{x=0\\z=0}} = \lim_{z\to 0}\frac{G(0,z)-G(0,0)}{z-0} = \lim_{z\to 0}\frac{G(0,z)}{z}$$
$$= \lim_{z\to 0} H(0,z) = H(0,0)\,.$$

但是根据 (7) 和 (13) 我们有 $\left.\dfrac{\partial G(x,z)}{\partial z}\right|_{\substack{x=0\\z=0}} = \mu$, 因此

$$H(0,0) = \mu\,.$$

于是方程组 (13) 的第二个方程有形式:

$$\dot{z} = zH(x,z)\,,$$

其中 $H(x,z)$ 在坐标原点的邻域中接近于 μ, 因而是正的. 由此得出, 在坐标原点的邻域中沿着每一根不同于分界线 U_1 和 U_2 的轨线, 其坐标 z 保持符号不变, 而且当 t 增加时, 它按模增加. 因此, 在 x, z 平面横轴之外无论哪一条轨线都不可能渐近地趋向于点 O, 而这就证明了稳定分界线 U_1 和 U_2 的唯一性.

现在已经证明了, 在区间 (a,b) 中只存在一个这样的点 p_0, 使得方程组 (7) 从它开始的轨线当 $t \to +\infty$ 时渐近地趋向于点 O, 它就是分界线 U_1. 如果点 p 位在区间 (a,p_0) 中, 那么由它出发的轨线就与弧 Oa 相交, 如果点 p 位于区间 (b,p_0) 中, 那么由它出发的轨线就与弧 Ob 相交.

由抛物线

$$x - \alpha y^2 = 0 \tag{15}$$

$$x + \alpha y^2 = 0 \tag{16}$$

及直线

$$y=\varepsilon$$

可以组成三角形 $[O,c,d]$ (图 62), 它具有类似于三角形 $[O,a,b]$ 的性质. 在区间 (c,d) 中只存在一点 q_0, 使得从 q_0 出发的轨线当 t 减小时渐近地趋向于点 O, 且成为不稳定的分界线 V_1. 如果 q 位在区间 (c,q_0) 中, 那么从 q 出发的轨线当 t 减小时就与弧 Oc 相交, 而如果点 q 位在区间 (d,q_0) 中, 那么从 q 出发的轨线当 t 减小时就与弧 Od 相交.

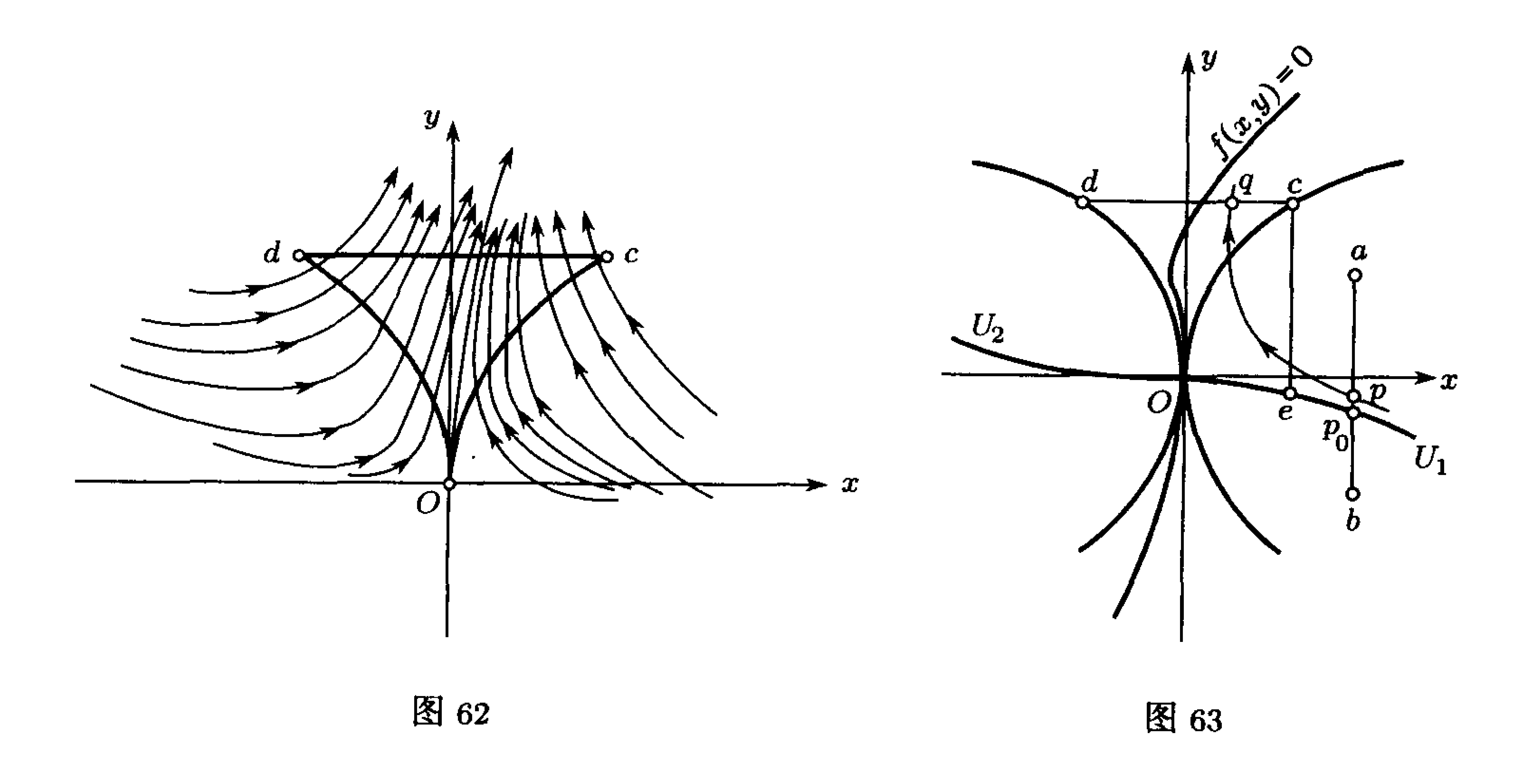


图 62 图 63

现在讨论曲线 (见 (7))

$$f(x,y)=0. \tag{17}$$

容易看出它在 O 处与纵轴相切. 由于函数 $f(x,y)$ 有二阶连续导数, 从而曲线 (17) 在点 O 处有确定的曲率半径, 因此数 α 可以选得这样大, 而数 ε 选得这样小, 使得在区间 $|y|\leqslant\varepsilon$ 上曲线 (17) 位于抛物线 (15) 和 (16) 之间 (图 63). 由于在曲线 (17) 的右边, 函数 $f(x,y)$ 是负的, 所以位于曲线 (17) 右边点的相速度向量的方向是指向左边的. 从点 c 引垂线段 $[ce]$, 它的下端点 e 位于分界线 U_1 上. 令 p 为区间 (a,p_0) 的点. 如果点 p 充分靠近点 p_0, 那么根据解对初始值的连续依赖性定理 (§23 的定理 14 和命题 (E)), 从 p 出发沿轨线运动的点要走经充分接近坐标原点, 因而必定与线段 $[c,e]$ 相交. 当点进一步运动时一定和弧 Oc 相交. 事实上, 如果动点与曲线 (17) 相交, 那么它必须先与弧 Oc 相交. 如果动点不与曲线 (17) 相交, 那么它对所有时间都在向左移动, 而从这点到曲线 (11) 沿垂直方向测量的距离 z 都在增大; 因此, 在这种情况下轨线必与弧 Oc 相交.

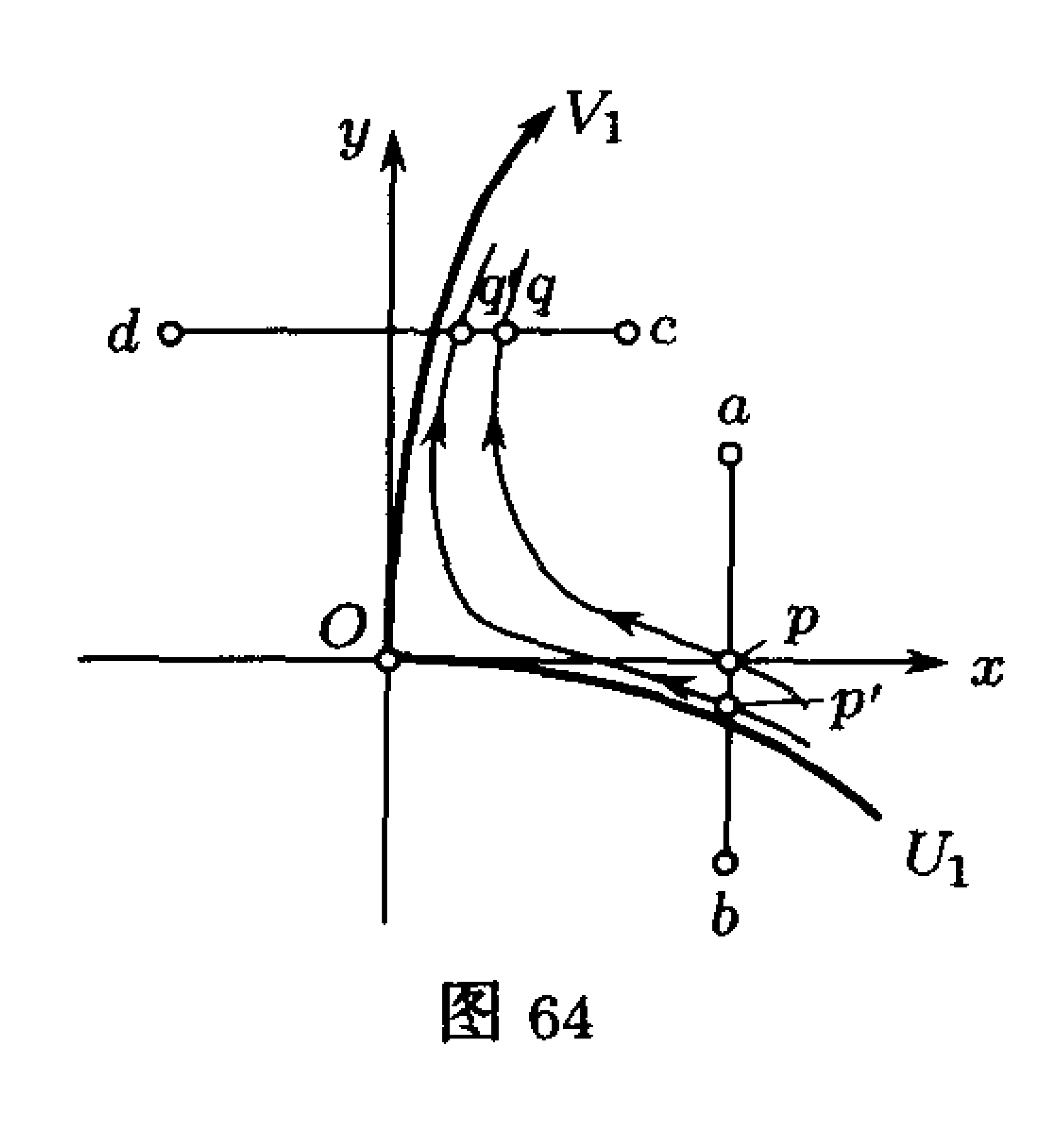


图 64

于是, 所考虑的轨线就进入三角形 $[O,c,d]$. 在此之后这条轨线也应当与区间 (c,q_0) 相交于某一点 q. 反之, 如果从区间 (c,q_0) 的一点 q' 出发、沿 t 减小的方向进行的轨线, 那么当点 q' 与 q_0 充分靠近时, 走到坐标原点附近的这根轨线, 就与区间 (a,p_0) 相交于某一点 p' (图 64). 比较这两种情形, 容易得出结论: 当 $p\to p_0$ 时有, $q\to q_0$. 这就给出了有关鞍点附近轨线性态的定性表示.

于是定理 22 得证.

现在我们来证明函数 $G(x,z)$ 的性质 (14).

(C) 设 $G(x,z)$ 是一个连续函数, 它在数值 $x=z=0$ 附近有定义, 且具有连续导数 $\frac{\partial}{\partial z}G(x,z)$. 如果

$$G(x,0)\equiv 0,$$

那么

$$G(x,z)=zH(x,z),$$

其中 $H(x,z)$ 是连续函数.

为了证明命题 (C), 我们定义函数 $H(x,z)$ 如下:

$$\begin{cases} H(x,z)=\dfrac{G(x,z)}{z}, & \text{当 } z\neq 0, \\ H(x,z)=\dfrac{\partial}{\partial z}G(x,z), & \text{当 } z=0, \end{cases} \tag{18}$$

并证明这样定义的函数 $H(x,z)$ 是连续的. 当 $z\neq 0$ 时, 由关系 (18) 定义的函数显然连续. 现在证明它在点 $(x_0,0)$ 处也连续. 我们有

$$G(x,z)=G(x,z)-G(x,0)=z\frac{\partial}{\partial z}G(x,\theta z),$$

其中 $0\leqslant\theta\leqslant 1$. 由于函数 $\frac{\partial}{\partial z}G(x,z)$ 连续, 所以当 $x\to x_0$, $z\to 0(z\neq 0)$ 时, 我们有 $\frac{G(x,z)}{z}=\frac{\partial}{\partial z}G(x,\theta z)\to\frac{\partial}{\partial z}G(x_0,0)$.

于是命题 (C) 得证.

结点与焦点附近轨线的性态

结点和焦点的研究比鞍点的研究简单得多. 这时只要考虑稳定的情形, 因为不稳定的焦点和结点可以从稳定的焦点和结点经过改变时间变化的方向得到. 当研究结点和焦点时, 引进极坐标是基本方法.

定理 23 设 $O=(0,0)$ 是方程组 (1) 的稳定结点，其特征值为 λ 和 μ，而且 $\mu<\lambda<0$. 我们过 O 沿特征值 λ 对应的特征向量方向作出直线 P，而过 O 沿特征值 μ 对应的特征向量方向作出直线 Q. 可以证明，从充分靠近点 O 开始的每一根轨线都渐近地趋向于 O，而且在点 O 处有切线. 这时只有两条轨线与直线 Q 相切，且以相反的方向走近点 O，而其余的轨线都与直线 P 相切. 在不稳定结点 $(0<\lambda<\mu)$ 的情况下，当 $t\to-\infty$ 时轨线的性态是类似的.

证明 将在方程组 (1) 右端有三次连续可微的假设下进行证明. 根据命题 (B)，方程组 (1) 可以写成形式 (5)；重新用 x 和 y 表示变量 ξ 和 η，我们得到方程组

$$\begin{cases}\dot{x}=f(x,y)=\lambda x+r(x,y),\\ \dot{y}=g(x,y)=\mu y+s(x,y),\end{cases}\tag{19}$$

这时函数 $r(x,y)$ 和 $s(x,y)$ 是三次连续可微的，并且这些函数本身以及它们关于 x 和 y 的一阶偏导数都在点 O 处等于零.

引进极坐标，亦即令

$$x=\rho\cos\varphi,\quad y=\rho\sin\varphi.\tag{20}$$

求导关系式 (20) 并把它们代入方程组 (19)，即得：

$$\begin{cases}\dot{\rho}\cos\varphi-\rho\sin\varphi\cdot\dot{\varphi}=\lambda\rho\cos\varphi+r(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi),\\ \dot{\rho}\sin\varphi+\rho\cos\varphi\cdot\dot{\varphi}=\mu\rho\sin\varphi+s(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi).\end{cases}$$

从所得到的关系式解出 $\dot{\rho}$ 和 $\dot{\varphi}$，可得：

$$\begin{cases}\dot{\rho}=\rho(\lambda\cos^2\varphi+\mu\sin^2\varphi)+F(\rho,\varphi),\\ \rho\dot{\varphi}=(\mu-\lambda)\rho\sin\varphi\cdot\cos\varphi+G(\rho,\varphi),\end{cases}\tag{21}$$

其中函数

$$F(\rho,\varphi)=\cos\varphi\cdot r(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)+\sin\varphi\cdot s(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi),$$
$$G(\rho,\varphi)=-\sin\varphi\cdot r(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)+\cos\varphi\cdot s(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)$$

是 φ 的以 2π 为周期的周期函数，它们都是关于 ρ 和 φ 三次连续可微，而且当 $\rho=0$ 时，这些函数与它们对 ρ 的一阶偏导数一起都等于零：

$$F(0,\varphi)=G(0,\varphi)=\frac{\partial F(0,\varphi)}{\partial\rho}=\frac{\partial G(0,\varphi)}{\partial\rho}=0.\tag{22}$$

根据下面要证明的命题 (D)，函数 $G(\rho,\varphi)$ 可以写成形式：

$$G(\rho,\varphi)=\rho H(\rho,\varphi)$$

其中函数 $H(\rho,\varphi)$ 是关于 ρ 和 φ 的二次连续可微函数, 它当 $\rho=0$ 时 (对任意的 φ) 等于零 (见 (31) 及 (22) 式) :

$$H(0,\varphi)=0\,, \tag{23}$$

所以

$$\frac{\partial H(0,\varphi)}{\partial\varphi}=0\,. \tag{24}$$

用 ρ 除以关系式 (21) 中第二式的两端, 我们得到方程组

$$\begin{cases}\dot{\rho}=\rho(\lambda\cos^2\varphi+\mu\sin^2\varphi)+F(\rho,\varphi)\,,\\ \dot{\varphi}=(\mu-\lambda)\sin\varphi\cdot\cos\varphi+H(\rho,\varphi)\,.\end{cases} \tag{25}$$

我们把 φ 看作横坐标, ρ 看作纵坐标, 并在变量 ρ 和 φ 的相平面上来讨论方程组 (25). 因为从 $(x,\,y)$ 平面到 $(\rho,\,\varphi)$ 平面的变换 (20) 不是互相单值的, 所以方程组 (19) 和 (25) 绝不是彼此等价的; 但是从方程组 (25) 的轨线性态可以作出方程组 (19) 轨线性态的结论. 我们只在带域 $|\,\rho\,|<\varepsilon$ 中考虑方程组 (25) 的轨线性态.

我们首先找出方程组 (25) 的平衡位置. 从 (25) 的第一个方程看出, 当充分小的 $\rho\neq 0$ 时, $\dot{\rho}$ 也不等于零 (见 (22)), 因此在带域 $|\,\rho\,|<\varepsilon$ 中所有的平衡位置都在轴 $\rho=0$ 上. 然后, 由 (25) 的第二个方程找出所有的平衡位置 (见 (23)) :

$$\rho=0,\quad \varphi=\frac{k\pi}{2},\quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots.$$

在点 $\rho=0,\ \varphi=\frac{k\pi}{2}$ 处线性化方程组 (25), 我们得到 (见 (22) 和 (24)) :

$$\begin{cases}\Delta\dot{\rho}=\mu_k\Delta\rho\,,\\ \Delta\dot{\varphi}=(\mu-\lambda)(-1)^k\Delta\varphi+\alpha_k\Delta\rho\,,\end{cases}$$

其中 μ_k (当 k 为偶数时等于 λ, 而当 k 是奇数时等于 μ) 是负数. 于是, 当 k 为偶数时点 $\rho=0,\ \varphi=\frac{k\pi}{2}$ 是方程组 (25) 的稳定结点, 而当 k 为奇数时它们是鞍点 (图 65). 这

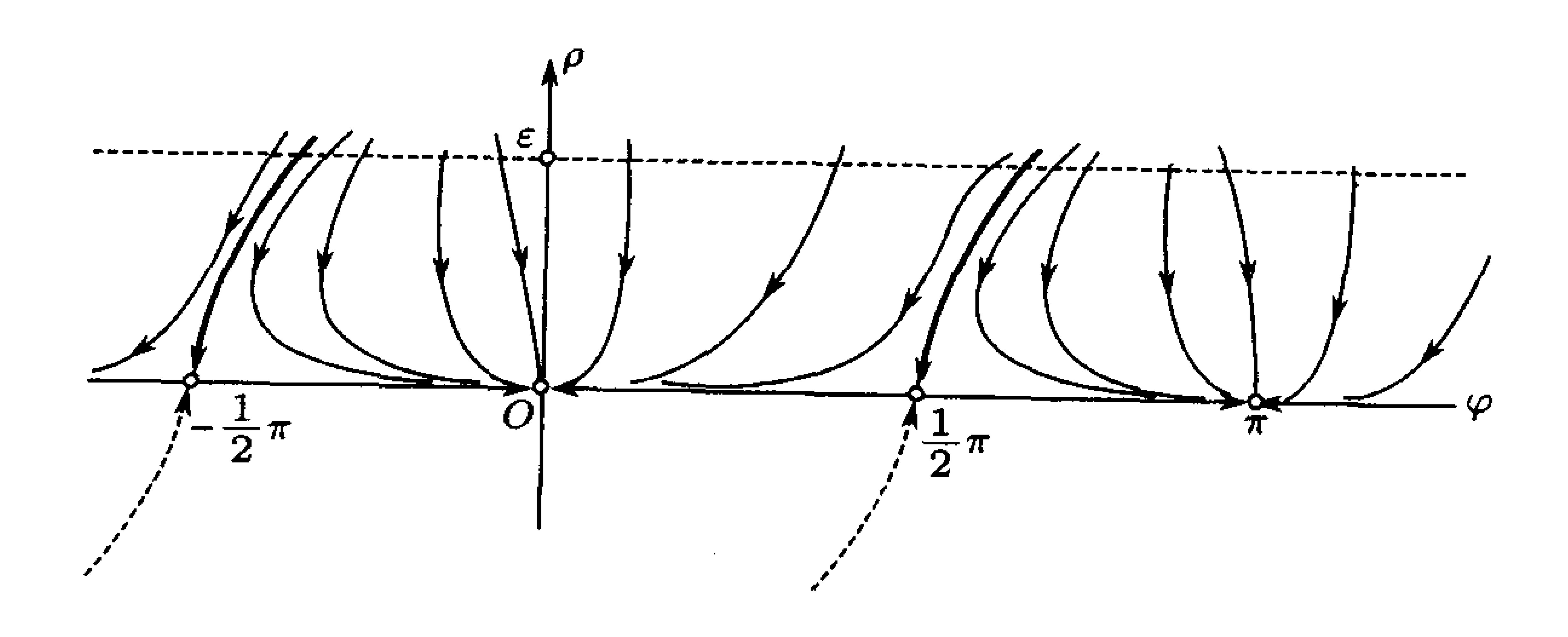


图 65

时鞍点的不稳定分界线是沿着 φ 轴方向, 而稳定分界线是沿从上面和下面趋于鞍点的曲线 (见定理 22).

现在来证明, 当正数 ε 充分小时, 方程组 (25) 的每一个从带域 $|\rho|<\varepsilon$ 出发的解, 或者是方程组 (25) 一个鞍点的稳定分界线, 或者是不走出带形区域 $|\rho|<\varepsilon$, 而渐近地趋向于方程组 (25) 的一个结点.

对应于每个平衡位置 $\rho=0, \varphi=\frac{k\pi}{2}$, 我们给它放置一个用不等式 $|\rho|<\delta$, $|\varphi-\frac{k\pi}{2}|<\delta$ 确定的邻域 U_k, 其中 δ 为正数. 如果 k 是偶数, 那么所考虑的平衡位置就是稳定的结点, 而根据它的渐近稳定性即知, 存在这样小的正数 δ, 使得每一个从邻域 U_k 中出发的解都渐近地趋于这个结点. 如果 k 是奇数, 那么对应的平衡位置就是鞍点, 因而存在这样小的正数 δ, 使得任何从 U_k 中出发的解, 只要不是平衡位置, 就或者是鞍点的稳定分界线, 或者要是离开邻域 U_k (见定理 22). 由于方程组 (25) 的右端对 φ 是周期的, 所以对所有 U_k, 可以选取共同的正数 δ. 现在可以选取充分小的正数 $\varepsilon\leqslant\delta$, 使得在带形区域 $|\rho|<\varepsilon$ 中方程 (25) 第一式右端的符号与 ρ 的符号相反, 因此从这个带域出发的每一个解, 量 $|\rho|$ 都是减小的. 其次, 当固定 δ 时, 可以选取这样小的正数 ε, 使得 (25) 式第二个方程右端在矩形

$$|\rho|<\varepsilon, \quad \frac{k\pi}{2}+\delta\leqslant\varphi\leqslant\frac{(k+1)\pi}{2}-\delta$$

中保持符号不变以及按模超过某一正数 α, 因此从这个矩形中出发的解经过不超过 $\frac{\pi}{2\alpha}$ 的时间就离开这个矩形, 并且进入邻域 U_k 或 U_{k+1} 中与稳定结点对应的那一个邻域. 根据方程组 (25) 对 φ 的周期性, 可以对所考虑形式的一切矩形取同一个数 ε.

现在我们看到, 对所选择的 ε, 每一个从带域 $|\rho|<\varepsilon$ 出发的解, 或者就是鞍点的稳定分界线, 或者是渐近地趋向于稳定结点.

方程组 (25) 从带形区域 $|\rho|<\varepsilon$ 出发的每一个解都有方程组 (19) 从距离这个方程组的稳定结点 O 小于 ε 出发的解与它相对应. 为了得到方程组 (19) 所有这样的解, 只要考虑方程组 (25) 从 $0\leqslant\rho<\varepsilon$ 出发的解就可以了. 根据方程组 (25) 及变换 (20) 关于 φ 的周期性, 方程组 (19) 只存在两个对应于方程组 (25) 当 $\rho>0$ 时经过鞍点稳定分界线的解, 而且方程组 (19) 的这两个解渐近地趋向于平衡位置 O, 与直线 Q 相切并从两个相反的方向接近于 O. 对应于方程组 (25) 趋于稳定结点的解, 是方程组 (19) 趋向于平衡位置 O, 且当接近于 O 时与直线 P 相切的解.

于是定理 23 得证.

定理 24 假设坐标原点 O 是方程组 (1) 的焦点, 亦即矩阵 (a_j^i) 的特征值是一对共轭复数

$$\lambda=\mu+i\nu, \quad \bar{\lambda}=\mu-i\nu,$$

而且 $\mu\neq0, \nu\neq0$. 于是可以证明, 如果 $\mu<0$, 那么当 $t\to+\infty$ 时所有经过点 O 附近的轨线都螺旋式地盘旋趋于坐标原点 O, 如果 $\mu>0$, 那么当 $t\to-\infty$ 时所有经过 O 附近的轨线都螺旋式地盘旋趋于坐标原点 O.

证明 为了进行证明，我们利用标准形式 (6)，并且把变量 ξ 和 η 改写成 x 和 y. 因此我们应当研究方程组

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,y) = \mu x - \nu y + r(x,y), \\ \dot{y} = g(x,y) = \nu x - \mu y + s(x,y). \end{cases} \tag{26}$$

引进极坐标，亦即令

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi. \end{cases} \tag{27}$$

求导关系式 (27)，并把所得到的表达式代入方程组 (26) 即得:

$$\dot{\rho}\cos\varphi - \rho\sin\varphi\cdot\dot{\varphi} = \mu\rho\cos\varphi - \nu\rho\sin\varphi + r(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi),$$
$$\dot{\rho}\sin\varphi + \rho\cos\varphi\cdot\dot{\varphi} = \nu\rho\cos\varphi + \mu\rho\sin\varphi + s(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi).$$

从得到的这个方程组解出 $\dot{\rho}$ 和 $\dot{\varphi}$，我们得出

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \mu\rho + \rho^2 p(\rho,\varphi), \\ \dot{\varphi} = \nu + \rho q(\rho,\varphi), \end{cases} \tag{28}$$

其中 $p(\rho,\varphi)$ 和 $q(\rho,\varphi)$ 当 ρ 充分小时是有界的，而且是 φ 的以 2π 为周期的周期函数. 为了确定起见，我们假设 $\mu < 0$. 我们来考察方程组 (28) 从点 (ρ_0,φ_0) 出发的轨线，其中 $0 < \rho_0 < \varepsilon$，而 ε 是充分小的正数. 从方程 (28) 得出，这根轨线渐近地趋向于轴 $\rho = 0$，而且 φ 趋于 $+\infty$ 或者是趋于 $-\infty$，其中正负号取决于数 ν 是正的或者是负的. 由此推得，在 (x, y) 平面上的相应轨线是螺旋式地盘旋趋向于坐标原点的.

于是定理 24 证毕.

下面的命题 (D) 只是在定理 23 的证明时用到过，它是上面证明过的命题 (C) 的实质性推广.

(D) 设 $G(\rho,\varphi)$ 在用不等式 $|\rho| < \varepsilon, \beta_1 < \varphi < \beta_2$ 给出的区域 W 中有定义，且满足条件

$$G(0,\varphi) = 0, \tag{29}$$

以及具有这样的性质，即函数

$$\frac{\partial G(\rho,\varphi)}{\partial\rho}$$

有直到包含 r 阶的连续导数. 那么函数 $G(\rho,\varphi)$ 在 W 中可以写成形式:

$$G(\rho,\varphi) = \rho H(\rho,\varphi), \tag{30}$$

其中函数 $H(\rho,\varphi)$ 由等式

$$\begin{cases} H(\rho,\varphi) = \dfrac{G(\rho,\varphi)}{\rho}, & \text{当 } \rho \neq 0 \text{ 时}, \\ H(0,\varphi) = \dfrac{\partial G(\rho,\varphi)}{\partial\rho} \end{cases} \tag{31}$$

确定, 并且在区域 W 中有直到包含 r 阶的连续偏导数. (当 $r=0$ 时所要证明的命题 (D) 就变成了命题 (C).)

为了证明命题 (D), 我们考察函数

$$K(\rho,\varphi)=\frac{\partial^{r-s}G(\rho,\varphi)}{\partial^{r-s}\rho},\quad 0\leqslant s\leqslant r. \tag{32}$$

这函数在 W 中关于 ρ 有直到包含 $s+1$ 阶的连续偏导数, 且满足条件

$$K(0,\varphi)=0 \tag{33}$$

(见 (29)). 我们证明, 当 $\rho\neq 0$ 时有等式

$$\frac{\partial^k}{\partial\rho^k}\left(\frac{K(\rho,\varphi)}{\rho}\right)=\sum_{i=0}^{k}\gamma_i\frac{\partial^{k+1}K(\theta_i\rho,\varphi)}{\partial\rho^{k+1}},\quad 0\leqslant k\leqslant s \tag{34}$$

成立, 其中数 $\gamma_0,\gamma_1,\cdots,\gamma_k$ 当每个 k 固定时与函数 $G(\rho,\varphi)$ 无关, 且满足条件

$$\gamma_0+\gamma_1+\cdots+\gamma_k=\frac{1}{k+1}, \tag{35}$$

而数 $\theta_0,\theta_1,\cdots,\theta_k$ 满足不等式

$$0\leqslant\theta_i\leqslant 1,\quad i=0,1,\cdots,k. \tag{36}$$

按照莱布尼茨公式计算导数 $\frac{\partial^k}{\partial\rho^k}\left(\frac{K(\rho,\varphi)}{\rho}\right)$, 即得:

$$\frac{\partial^k}{\partial\rho^k}\left(\frac{K(\rho,\varphi)}{\rho}\right)=\frac{1}{\rho^{k+1}}\sum_{i=0}^{k}a_i\rho^i\frac{\partial^iK(\rho,\varphi)}{\partial\rho^i}, \tag{37}$$

其中数 $a_0,a_1,\cdots,a_k$ 当每个 k 固定时与函数 $G(\rho,\varphi)$ 无关. 把每一个函数 $\frac{\partial^iK(\rho,\varphi)}{\partial\rho^i}$ 关于 ρ 按泰勒公式展开, 即得:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^iK(\rho,\varphi)}{\partial\rho^i}&=\frac{\partial^iK(0,\varphi)}{\partial\rho^i}+\frac{\rho}{1!}\frac{\partial^{i+1}K(0,\varphi)}{\partial\rho^{i+1}}+\cdots\\&+\frac{\rho^{k-i}}{(k-i)!}\frac{\partial^kK(0,\varphi)}{\partial\rho^k}+\frac{\rho^{k-i+1}}{(k-i+1)!}\frac{\partial^{k+1}K(\theta_i\rho,\varphi)}{\partial\rho^{k+1}}.\end{aligned} \tag{38}$$

其次, 把表达式 (38) 代入 (37), 由 (33) 我们得到

$$\frac{\partial^k}{\partial\rho^k}\left(\frac{K(\rho,\varphi)}{\rho}\right)=\frac{1}{\rho^{k+1}}\left[\sum_{i=1}^{k}b_i\rho^i\frac{\partial^iK(0,\varphi)}{\partial\rho^i}+\sum_{j=0}^{k}\gamma_j\rho^{k+1}\frac{\partial^{k+1}K(\theta_j\rho,\varphi)}{\partial\rho^{k+1}}\right], \tag{39}$$

其中数 b_i 和 γ_j 是常数, 当每个 k 固定时它们与函数 $G(\rho,\varphi)$ 的选取无关.

为了证明关系式 (34), 现在只要证明常数 $b_1, \cdots, b_k$ 等于零, 而常数 $\gamma_0, \gamma_1, \cdots, \gamma_k$ 满足条件 (35) 就够了. 因为上述常数与函数 $G(\rho, \varphi)$ 的选择无关, 所以只要对特殊形式的函数 $G(\rho, \varphi)$ 来证明所指出的性质. 我们考虑 $G(\rho, \varphi)$ 是多项式的情形:

$$G(\rho, \varphi) = \frac{\varphi^{r-s}}{(r-s)!} \sum_{i=1}^{k+1} \frac{\alpha_i}{i!} \rho^i . \tag{40}$$

由 (32) 导出:

$$\frac{\partial^k}{\partial \rho^k} \left(\frac{K(\rho, \varphi)}{\rho} \right) = \frac{\alpha_{k+1}}{k+1} . \tag{41}$$

另一方面, 对于多项式 (40) 来说, 等式 (39) 有形式:

$$\frac{\partial^k}{\partial \rho^k} \left(\frac{K(\rho, \varphi)}{\rho} \right) = \frac{1}{\rho^{k+1}} \left[\sum_{i=1}^{k} b_i \rho^i \alpha_i + \alpha_{k+1} \rho^{k+1} \sum_{j=0}^{k} \gamma_i \right] . \tag{42}$$

等式 (41) 和 (42) 的右端当 $|\rho| < \varepsilon$, $\rho \neq 0$ 时应当相同, 又因为数 $\alpha_1, \cdots, \alpha_{k+1}$ 是任意的, 故由此得出, 数 $b_1, \cdots, b_k$ 等于零以及关系式 (35).

于是公式 (34) 得证.

在讨论中我们引进函数 $L_k(\rho, \varphi)$, $k = 0, 1, \cdots, s$, 令:

$$\begin{cases} L_k(\rho, \varphi) = \dfrac{\partial^k}{\partial \rho^k} \left(\dfrac{K(\rho, \varphi)}{\rho} \right), & \text{当 } \rho \neq 0 \text{ 时}, \\ L_k(0, \varphi) = \dfrac{1}{k+1} \dfrac{\partial^{k+1} K(0, \varphi)}{\partial \rho^{k+1}} . \end{cases} \tag{43}$$

从等式 (34) 和 (35) 得出, $L_k(\rho, \varphi)$ 是变量 ρ, φ 在区域 W 中的连续函数. 显然, 当 $\rho \neq 0$ 时满足等式:

$$L_{k+1}(\rho, \varphi) = \frac{\partial L_k(\rho, \varphi)}{\partial \rho}, \quad k = 0, 1, \cdots, s-1 . \tag{44}$$

我们来证明这些等式当 $\rho = 0$ 时也正确. 设 $0 < \rho_0 < \varepsilon$, $0 < \rho < \varepsilon$, 于是我们有:

$$L_k(\rho, \varphi) = L_k(\rho_0, \varphi) + \int_{\rho_0}^{\rho} L_{k+1}(\xi, \varphi) d\xi . \tag{45}$$

因为在这个等式左、右两端的函数都是连续的, 所以这个等式当 $\rho = 0$ 时也正确:

$$L_k(0, \varphi) = L_k(\rho_0, \varphi) + \int_{\rho_0}^{0} L_{k+1}(\xi, \varphi) d\xi . \tag{46}$$

从关系式 (45) 减去 (46), 并把得到的结果除以 ρ, 即得

$$\frac{L_k(\rho, \varphi) - L_k(0, \varphi)}{\rho} = \frac{\int_0^{\rho} L_{k+1}(\xi, \varphi) d\xi}{\rho}, \quad (\rho > 0) .$$

当 $\rho \to 0$ 时取极限, 我们看到 $L_k(\rho, \varphi)$ 在 $\rho = 0$, 处关于 ρ 的右导数存在, 且等于 $L_{k+1}(0, \varphi)$. 同样证明左导数也存在且等于 $L_{k+1}(0, \varphi)$. 于是等式 (44) 在整个区域 W 中正确.

从关系式 (43),(32) 当 $k = 0, s = r$ 时得出等式 (30),(31), 而由关系 (44) 及 (32) 推出, 函数 $H(\rho, \varphi)$ 具有连续导数

$$\frac{\partial^{r-s+k} H(\rho, \varphi)}{\partial \rho^k \partial \varphi^{r-s}}, \quad 0 \leqslant k \leqslant s, \quad 0 \leqslant s \leqslant r,$$

这就是说, 函数 $H(\rho, \varphi)$ 具有直到包含 r 阶的所有连续偏导数.

于是命题 (D) 得证.

§31. 周期解的稳定性

在这一节中将讨论关于自治方程组以及周期右端方程组的周期解稳定性问题.

稳定性的概念

在 § 26 中已经给出了自治方组平衡位置的李雅普诺夫稳定性定义. 这里我们首先给出任意方程组解的李雅普诺夫稳定性定义.

设

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}) \tag{1}$$

是 n 阶标准方程组的向量写法, 它的右端与其偏导数 $\dfrac{\partial f^i(t, \boldsymbol{x})}{\partial x^j}$ 一起都在变量 $t, \boldsymbol{x}$ 空间的某一个开集 Γ 上有定义且连续. 方程 (1) 以 $\theta, \boldsymbol{\xi}$ 为初始值的解记为 $\boldsymbol{\varphi}(t, \theta, \boldsymbol{\xi})$.

定义 方程 (1) 以 t_0, $\boldsymbol{x}_0$ 为初始值的解 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ 称为**按李雅普诺夫稳定的**, 如果满足条件: (1) 存在这样的正数 ρ, 使得当 $|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_0| < \rho$ 时, 解 $\boldsymbol{\varphi}(t, t_0, \boldsymbol{x}_1)$ 对所有的值 $t \geqslant t_0$ 都有定义, 特别解 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ 本身对所有的值 $t \geqslant t_0$ 也有定义; (2) 对于任意给定的正数 ε, 可以找到这样的正数 $\delta \leqslant \rho$, 使得当 $|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_0| < \delta$ 时, 有 $|\boldsymbol{\varphi}(t, t_0, \boldsymbol{x}_1) - \boldsymbol{\varphi}(t)| < \varepsilon$ 对一切的值 $t \geqslant t_0$ 成立. 方程 (1) 以 t_0, $\boldsymbol{x}_0$ 为初始值的李雅普诺夫稳定解 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ 称为**渐近稳定的**, 如果可以找到这样的正数 $\sigma \leqslant \rho$, 使得当 $|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_0| < \sigma$ 时有:

$$\lim_{t \to +\infty} |\boldsymbol{\varphi}(t, t_0, \boldsymbol{x}_1) - \boldsymbol{\varphi}(t)| = 0.$$

这里引用的李雅普诺夫稳定性和渐近稳定性定义, 关于解 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ 初始值 t_0, $\boldsymbol{x}_0$ 的随机选取是不变的, 这可以从 § 23 的命题 (E) 得出.

在特殊的情况下, 当方程组 (1) 是自治的, 而解 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ 是平衡位置时, 这里引用的稳定性定义与在 § 26 给出的定义是一样的.

下面我们将考虑方程组 (1) 的右端是 t 的以 τ 为周期的周期函数:

$$\boldsymbol{f}(t + \tau, \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}), \tag{2}$$

也考虑自治的方程组 (1), 即

$$\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}). \tag{3}$$

不管在哪种情况下, 都要研究以 τ 为周期的周期解 $\boldsymbol{\varphi}(t)$:

$$\boldsymbol{\varphi}(t+\tau)=\boldsymbol{\varphi}(t) \tag{4}$$

的稳定性问题, 在自治方程组的情况下, 我们假设 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ 不是平衡位置. 在周期方程组 (见 (2)) 的情况下, 我们给出了以 τ 为周期的解 (4) 是渐近稳定的充分条件. 由于自治方程组是周期方程组的特殊情形, 因此可能会期待着这些条件也能用来研究自治方程组的周期解. 但是, 可以证明对于自治方程组来说, 这些条件是不满足的 (自治方程组的周期解不可能是渐近稳定的), 因而对于自治方程组周期解的李雅普诺夫稳定性要由另外较弱的条件给出.

(A) 为了研究在解 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ 附近方程 (1) 解的性态, 我们引进新的未知向量函数 $\boldsymbol{y}$, 令

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\varphi}(t)+\boldsymbol{y}. \tag{5}$$

今后我们将假设方程组 (1) 的右端在集合 Γ 上关于向量 $\boldsymbol{x}$ 的坐标有二阶连续偏导数. 在方程组 (1) 中引进变量替换 (5), 并且把它的右端关于 $\boldsymbol{y}$ 展开, 注意到 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ 是方程 (1) 的解, 我们得到

$$\dot{y}^i=\sum_j\frac{\partial f^i(t,\boldsymbol{\varphi}(t))}{\partial x^j}y^j+r^i(t,\boldsymbol{y}). \tag{6}$$

线性化这个方程组, 亦即丢掉变量 $\boldsymbol{y}$ 的二阶小量项 r^i, 我们得到线性方程组:

$$\dot{\boldsymbol{y}}=A(t)\boldsymbol{y}, \tag{7}$$

这里 $A(t)$ 是以

$$a^i_j(t)=\frac{\partial f^i(t,\boldsymbol{\varphi}(t))}{\partial x^j}$$

为元素的矩阵. 我们假设方程 (1) 的右端关于变量 t 是以 τ 为周期的周期函数 (见 (2)), 而解 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ 也是以 τ 为周期的周期函数. 在这些假设下, 线性方程组 (7) 是以 τ 为周期的周期系数方程组:

$$a^i_j(t+\tau)=a^i_j(t),\quad i,j=1,\cdots,n,$$

因此可以谈论它的特征数 (见 § 19, (E)). 可以证明, 当方程组 (1) 是自治的 (见 (3)), 且周期解 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ 又不是平衡位置时, 线性方程组 (7) 必定有一个等于 1 的特征数.

我们来证明上述结论. 设 $\Psi(t)$ 是一个矩阵, 它满足矩阵方程

$$\dot{\Psi}=A(t)\cdot\Psi,$$

以及初始条件

$$\Psi(t_0)=E\,, \tag{8}$$

并令 C 是解 $\Psi(t)$ 的根本矩阵 (见 § 19, (A)), 因此

$$\Psi(t+\tau)=\Psi(t)C\,. \tag{9}$$

直接验证即知, 向量方程 (7) 的任一解 $\boldsymbol{\psi}(t)$ 都可以写成形式:

$$\boldsymbol{\psi}(t)=\Psi(t)\boldsymbol{\psi}(t_0)\,.$$

由此以及关系式 (8) 与 (9) 即得:

$$\boldsymbol{\psi}(t_0+\tau)=C\boldsymbol{\psi}(t_0)\,. \tag{10}$$

注意到方程组 (1) 是自治的, 我们有 (见 (3)) :

$$\dot{\boldsymbol{\varphi}}(t)=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\varphi}(t))\,;$$

对 t 求导这关系式, 可得

$$\ddot{\boldsymbol{\varphi}}(t)=A(t)\dot{\boldsymbol{\varphi}}(t)\,.$$

于是向量函数 $\dot{\boldsymbol{\varphi}}(t)$ 满足向量方程 (7) . 但是向量函数 $\dot{\boldsymbol{\varphi}}(t)$ 是以 τ 为周期的周期函数, 于是由 (10) 得出

$$\dot{\boldsymbol{\varphi}}(t_0)=\dot{\boldsymbol{\varphi}}(t_0+\tau)=C\dot{\boldsymbol{\varphi}}(t_0)\,, \tag{11}$$

且因为 $\dot{\boldsymbol{\varphi}}(t_0)\neq 0$ (由于 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ 不是平衡位置), 所以由此得到, 矩阵 C 有一个特征值等于 1 , 从而方程 (7) 有一个特征数等于 1 .

李雅普诺夫定理及安德罗诺夫–维特 (Андронов–Витт) 定理

现在我们可以就方程组 (1) 是周期方程组和自治方程组来陈述周期解 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ 稳定性的充分条件.

定理 25 设方程 (1) 关于 t 是以 τ 为周期的周期函数 (见 (2)), 而 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ 是它的也以 τ 为周期的周期解 (见 (4)). 如果方程 (7) 的所有特征数 (见 § 19, (E)) 按模都小于 1, 那么解 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ 是渐近稳定的; 并且存在这样的正数 $\sigma>0$, 使得当 $|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0|<\sigma$ 时有估计式

$$|\boldsymbol{\varphi}(t,t_0,\boldsymbol{x}_1)-\boldsymbol{\varphi}(t)|<re^{-\alpha(t-t_0)}|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0|\,,\quad t\geqslant t_0 \tag{12}$$

成立, 其中 r 与 α 是两个与 $\boldsymbol{x}_1$ 无关的正数.

定理 26 设方程 (1) 是自治的, 而 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ 是它的以 τ 为周期的周期解, 且不是平衡位置. 如果方程 (7) 的特征数中, 等于 1 的特征数的重数是 1 , 而其余的特征数按模都小于 1 , 那么解 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ 是李雅普诺夫稳定的.

定理 25 是属于李雅普诺夫的. 定理 26 是属于安德罗诺夫和维特的, 而且是作为一个很精细的李雅普诺夫定理的十分简单推论得到的. 这里给出定理 26 的另外一个依靠李雅普诺夫方法的证明.

在证明定理 25 和 26 之前, 讲述一下对两种情况都需要的一些做法.

在 § 26 中曾经给出了某个函数基于自治方程组的导数定义. 现在对非自治方程组也给出这个定义.

(B) 设

$$F(\boldsymbol{x}) = F(x^1, \cdots, x^n)$$

是向量变量 $\boldsymbol{x}$ 的某个数值函数, 这个函数基于方程组 (1) 在点 $t_0, \boldsymbol{x}_0$ 处的导数 $\dot{F}_{(1)}(t_0, \boldsymbol{x}_0)$ 是用如下方法定义的. 设 $\varphi(t)$ 是方程组 (1) 以 t_0, $\boldsymbol{x}_0$ 为初始值的解, 令

$$\dot{F}_{(1)}(t_0, \boldsymbol{x}_0) = \frac{d}{dt} F(\boldsymbol{\varphi}(t))\bigg|_{t=t_0}.$$

实现上式右端的求导, 我们得到:

$$\dot{F}_{(1)}(t, \boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F(\boldsymbol{x})}{\partial x^i} f^i(t, \boldsymbol{x}).$$

如果方程组 (1) 是自治的情况下, 那么函数 $F(\boldsymbol{x})$ 基于方程组 (1) 在点 t, $\boldsymbol{x}$ 处的导数 $\dot{F}_{(1)}(t, \boldsymbol{x})$ 就与 t 无关.

(C) 设

$$\dot{\boldsymbol{z}} = B\boldsymbol{z} + \boldsymbol{p}(t, \boldsymbol{z}) \tag{13}$$

是标准微分方程组的向量写法, 其中 $B = (b_j^i)$ 是常数矩阵, 它的所有特征值都有负实部, 而余项 $\boldsymbol{p}(t, \boldsymbol{z})$ 对于 $t \geqslant t_0$, $|\boldsymbol{z}| < c$, $(c > 0)$ 有定义, 且假设满足估计式

$$|\boldsymbol{p}(t, \boldsymbol{z})| \leqslant p|\boldsymbol{z}|^2, \tag{14}$$

这里 p 是正数. 于是可以证明, 方程 (13) 的解 $\boldsymbol{z} = 0$ 是渐近稳定的, 并且对于以 t_0, $\boldsymbol{z}_1$, $|\boldsymbol{z}_1| < c_1 < c$ 为初始值的解 $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{\chi}(t, \boldsymbol{z}_1)$ 有估计式

$$|\boldsymbol{\chi}(t, \boldsymbol{z}_1)| \leqslant r|\boldsymbol{z}_1|e^{-\alpha(t-t_0)}, \quad t \geqslant t_0 \tag{15}$$

成立, 其中 r, α 是与 $\boldsymbol{z}_1$ 无关的正数.

命题 (C) 的证明与李雅普诺夫定理的证明完全一样 (见 § 26), 因此进行这个证明时就不必过于详细了.

令 $W(\boldsymbol{z})$ 是常系数线性方程组

$$\dot{\boldsymbol{z}} = B\boldsymbol{z} \tag{16}$$

的李雅普诺夫函数 (见§26,(E)), 因此它满足不等式

$$\dot{W}_{(16)}(\boldsymbol{z})=\sum_{i,j}\frac{\partial W(\boldsymbol{z})}{\partial z^i}b^i_j z^j\leqslant -2\beta W(\boldsymbol{z}),\quad \beta>0\,.$$

从这个不等式以及估计式 (14) 我们就得到: 当

$$W(\boldsymbol{z})\leqslant c_2$$

时有不等式

$$\dot{W}_{(13)}(\boldsymbol{z})=\sum_{i,j}\frac{\partial W(\boldsymbol{z})}{\partial z^i}b^i_j z^j+\sum_{i}\frac{\partial W(\boldsymbol{z})}{\partial z^i}p^i(t,\boldsymbol{z})\leqslant -2\alpha W(\boldsymbol{z})$$

成立, 这里 $\alpha<\beta$ 和 c_2 是某些正数. 令

$$w(t)=W(\boldsymbol{\chi}(t,\boldsymbol{z}_1))\,,$$

其中 $W(\boldsymbol{z}_1)<c_2$. 对于函数 $w(t)$, $t\geqslant t_0$ 只要有关系式

$$w(t)\leqslant c_2$$

成立, 那么它就满足不等式

$$\dot{w}(t)\leqslant -2\alpha w(t)\,. \tag{17}$$

从 (17) 得出, 只要 $w(t)\leqslant c_2$, 函数 $w(t)$ 就减少, 确切地说就不增, 而由于在初始时刻 $t=t_0$ 满足不等式 $w(t)<c_2$, 所以点 $\boldsymbol{\chi}(t,\boldsymbol{z}_1)$ 不可能离开由不等式 $W(\boldsymbol{z})\leqslant c_2$ 所确定的闭集 F, 因此对所有的 $t\geqslant t_0$, 解 $\boldsymbol{\chi}(t,\boldsymbol{z}_1)$ 有定义 (比较§22,(B),(C)) 且对所有这些 t 值, 不等式 (17) 成立. 现在假设 $\boldsymbol{z}_1\neq 0$, 我们可以从不等式 (17) 出发进行如下计算:

$$\frac{\dot{w}(t)}{w(t)}\leqslant -2\alpha$$

或者把它积分即得:

$$\ln w(t)-\ln w(t_0)\leqslant -2\alpha(t-t_0)\,,$$

由此得到:

$$w(t)\leqslant w(t_0)e^{-2\alpha(t-t_0)}\,,$$

或者同样地写成

$$W(\boldsymbol{\chi}(t,\boldsymbol{z}_1))\leqslant W(\boldsymbol{z}_1)e^{-2\alpha(t-t_0)}\,.$$

从这个估计式直接得出估计式 (15).

于是命题 (C) 得证.

定理 25 的证明

根据定理 12, 存在变换

$$y = T(t)z, \tag{18}$$

其中矩阵 $T(t)$ 是实的, 且以 2τ 为周期; 在这个变换之下, 方程 (7) 变成有实常系数矩阵 B 的方程

$$\dot{z} = Bz.$$

矩阵 e^{tB} 是这个方程的解 (见 § 19,(C)), 因此矩阵 $e^{2\tau B}$ 是这个方程的根本矩阵, 而这就意味着 $e^{2\tau B}$ 就是方程 (7) 的根本矩阵. 于是根据定理 25 的假设, 矩阵 $e^{2\tau B}$ 的所有特征值按模都小于 1. 但是根据定理 29 (见 § 35), 矩阵 $e^{2\tau B}$ 的特征值都有形式 $e^{2\tau\lambda}$, 其中 λ 取遍矩阵 B 的所有特征值, 所以 $|e^{2\tau\lambda}| < 1$, 因此矩阵 B 的所有特征值都有负实部. 将变量的变换 (18) 应用到方程 (6), 我们就把方程 (6) 化成形式 (13), 而对于它的解 $z = \chi(t, z_1)$ 我们得到估计式 (15), 从这估计式以及矩阵 $T(t)$ 的非退化性得到估计式 (12).

于是定理 25 得证.

定理 26 的证明

从方程 (7) 有一个重数为 1 的特征数 1, 而其余的特征数的模小于 1 的假设出发, 我们来证明存在以 2τ 为周期的矩阵 $T(t)$, 用它作出的变换

$$y = T(t)z \tag{19}$$

把方程 (7) 变成有实常系数矩阵 B 的方程

$$\dot{z} = Bz, \tag{20}$$

而矩阵 B 有形式:

$$B = \begin{bmatrix} B^* & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix}, \tag{21}$$

其中 B^* 是其所有特征值都有负实部的 $n-1$ 阶方阵.

令 C 是矩阵方程 (见 (7))

$$\dot{Y} = A(t)Y \tag{22}$$

的某一个解的根本方阵. 因为 C 有一个一重的特征值 1, 所以在某个基之下它有形式:

$$\begin{bmatrix} C^* & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}, \tag{23}$$

这里 C^* 是 $n-1$ 阶的实方阵, 它的所有特征值按模都小于 1 (见 § 34, (G),(H)). 因为矩阵 C 和矩阵 (23) 可以互相通过变换得到, 所以矩阵 (23) 也是方程 (22) 某一解的根本矩阵; 我们今后假设 C 和矩阵 (23) 完全相同. 由 § 35 中的命题 (D), 存在满足条件:

$$e^{2\tau B^*} = C^{*2},$$

的实矩阵 B^*, 而且由于定理 29, 矩阵 B^* 的所有特征值都有负实部. 显然, 矩阵 B (见 (21)) 满足条件:

$$e^{2\tau B} = C^2$$

(见 (23)). 于是 (比较定理 12 的证明), 存在变换 (19), 它把方程 (7) 变成方程 (20).

现在来搞清楚, 为了使得变换 (19) 能够把方程 (7) 变成方程 (20), 矩阵 $T(t)$ 应当满足怎样的条件? 求导关系式 (19), 我们得到:

$$\dot{\boldsymbol{y}} = \dot{T}(t)\boldsymbol{z} + T(t)\dot{\boldsymbol{z}} = \dot{T}(t)\boldsymbol{z} + T(t)B\boldsymbol{z}.$$

在这个关系式中, 按照公式 $\boldsymbol{z} = T^{-1}\boldsymbol{y}$ 替换 $\boldsymbol{z}$ 即得:

$$\dot{\boldsymbol{y}} = (\dot{T}(t) + T(t)B)T^{-1}(t)\boldsymbol{y}.$$

因为这个方程与方程 (7) 相同, 所以

$$(\dot{T}(t) + T(t)B)T^{-1}(t) = A(t).$$

以矩阵 $T(t)$ 右乘这关系式的两端得到:

$$\dot{T}(t) + T(t)B = A(t)T(t). \tag{24}$$

加在 $T(t)$ 上的这个条件是变换 (19) 能把方程 (7) 变成方程 (20) 的充分和必要的条件. 我们将关系式 (24) 分成两个, 为此把矩阵 $T(t)$ 表示成形式:

$$T(t) = (T^*(t), \boldsymbol{t}(t)),$$

其中 $T^*(t)$ 是 n 行 $n-1$ 列的矩阵, 而 $\boldsymbol{t}(t)$ 是矩阵 $T(t)$ 的最后一列, 因此它不是零向量. 于是我们有 (见 (21)):

$$\dot{T}^*(t) + T^*(t)B^* = A(t)T^*(t), \tag{25}$$

$$\dot{\boldsymbol{t}}(t) = A(t)\boldsymbol{t}(t). \tag{26}$$

由关系式 (26) 看出 $\boldsymbol{t}(t)$ 是方程 (7) 的以 2τ 为周期的周期解, 所以它满足条件 (与 (10) 比较):

$$\boldsymbol{t}(t_0) = \boldsymbol{t}(t_0 + 2\tau) = C^2\boldsymbol{t}(t_0).$$

于是, 向量 $\boldsymbol{t}(t_0)$ 是矩阵 C^2 对应于特征值 1 的特征向量. 因为矩阵

$$C^2 = \begin{bmatrix} C^{*2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}$$

有一重的特征值 1, 而且还知道矩阵 C^2 对应于这个特征值的一个特征向量 $\dot{\varphi}(t_0) \neq 0$ (见 (11)), 所以我们有

$$\boldsymbol{t}(t_0) = \gamma\dot{\boldsymbol{\varphi}}(t_0),$$

又因为两个向量函数 $\boldsymbol{t}(t)$ 和 $\dot{\varphi}(t)$ 都是方程 (7) 的解, 因此有

$$\boldsymbol{t}(t) \equiv \gamma\dot{\boldsymbol{\varphi}}(t).$$

由此看出, 如果在矩阵 $T(t)$ 中把它的最后一列 $\boldsymbol{t}(t)$ 换成向量 $\dot{\varphi}(t)$, 那么重新得到的矩阵 $(T^*(t), \dot{\varphi}(t))$ 仍将满足条件 (25) 和 (26). 因此我们将认为

$$T(t) = (T^*(t), \dot{\boldsymbol{\varphi}}(t)). \tag{27}$$

从所得到的关系式 (25) 和 (27) 出发, 我们把方程 (1) 的未知函数 $\boldsymbol{x}$ 变换成在自治情况下 (见 (3)) 新的未知函数 $\boldsymbol{z}^*$, s, 其中 $\boldsymbol{z}^* = (z^1, \cdots, z^{n-1})$ 是 $n-1$ 维向量, 下面我们将它看成是单列矩阵, 而 s 是新的数值变量. 我们设 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{z}^*$, s 之间的变换为

$$\boldsymbol{x} = T^*(s)\boldsymbol{z}^* + \boldsymbol{\varphi}(s) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{z}^*, s). \tag{28}$$

这个变换关于 s 是周期的, 其周期为 2τ. 当 $|\boldsymbol{z}^*|$ 充分小时, 关系式 (28) 建立了在每一对 $\boldsymbol{z}^*$, s 与由解 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\varphi}(t)$ 所确定的周期轨线 K 上的点 $\boldsymbol{\varphi}(s)$ 相邻近的点 $\boldsymbol{x}$ 之间的对应. 由于这个映射在点对 $\boldsymbol{z}^* = \mathbf{0}$, $s = s^0$ 处的函数行列式等于矩阵 $T(s_0)$ (见 (27)) 的行列式, 因此不等于零, 所以映射 (28) 在点对 $\boldsymbol{z}^* = \mathbf{0}$, $s = s^0$ 附近是单值的. 我们把点对 $(\boldsymbol{z}^*, s)$ 的坐标 s 看成是以 2τ 为周期的循环坐标, 亦即把点对 $(\boldsymbol{z}^*, s)$ 和 $(\boldsymbol{z}^*, s + 2\tau)$ 看成一样. 因为点对 $(\mathbf{0}, s_0)$ 和 $(\mathbf{0}, s_0 + \tau)$ 在变换 (28) 之下变成轨线 K 的同一点 $\boldsymbol{\varphi}(s_0)$, 所以点对 $(\mathbf{0}, s_0)$ 和 $(\mathbf{0}, s_0 + \tau)$ 的某些邻域与轨线 K 上点 $\boldsymbol{\varphi}(s_0)$ 的同一个邻域在映射 (28) 之下是互为单值的. 于是, 映射 (28) 把所有点对 $(\boldsymbol{z}^*, s)$ (当 $|\boldsymbol{z}^*|$ 充分小时) 的集合**两层地**覆盖在曲线 K 的某一个邻域上. 这时由所有点对 $(\mathbf{0}, s)$, $0 \leqslant s \leqslant 2\tau$ 所组成的闭曲线两次覆盖在曲线 K 上.

现在用公式 (28) 来替换方程 (1) (见 (3)) 中的未知向量 $\boldsymbol{x}$. 代入左端给出:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = T^{*'}(s)\boldsymbol{z}^*\dot{s} + T^*(s)\dot{\boldsymbol{z}}^* + \boldsymbol{\varphi}'(s)\dot{s}. \tag{29}$$

代入右端得到:

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\varphi}(s)) + A(s)T^*(s)\boldsymbol{z}^* + \boldsymbol{R}(s, \boldsymbol{z}^*), \tag{30}$$

其中余项 $\boldsymbol{R}(s,\boldsymbol{z}^*)$ 对于 s 是以 2τ 为周期的周期函数, 而关于向量 $\boldsymbol{z}^*$ 是二阶无穷小量. 使关系式 (29) 和 (30) 的右端相等, 即得:

$$T^*(s)\dot{\boldsymbol{z}}^* + T^{*'}(s)\boldsymbol{z}^*\dot{s} + \boldsymbol{\varphi}'(s)\dot{s} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\varphi}(s)) + A(s)T^*(s)\boldsymbol{z}^* + \boldsymbol{R}(s,\boldsymbol{z}^*).$$

按公式 (25) 替换矩阵 $A(s)T^*(s)$, 以及用 $\boldsymbol{\varphi}'(s)$ 代替 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\varphi}(s))$, 我们得到

$$T^*(s)\dot{\boldsymbol{z}}^* + \boldsymbol{\varphi}'(s)\dot{s} + T^{*'}(s)\boldsymbol{z}^*\dot{s} = \boldsymbol{\varphi}'(s) + (T^{*'}(s) + T^*(s)B^*)\boldsymbol{z}^* + \boldsymbol{R}(s,\boldsymbol{z}^*),$$

由此得出

$$T^*(s)(\dot{\boldsymbol{z}}^* - B^*\boldsymbol{z}^*) + (\boldsymbol{\varphi}'(s) + T^{*'}(s)\boldsymbol{z}^*)(\dot{s} - 1) = \boldsymbol{R}(s,\boldsymbol{z}^*). \tag{31}$$

我们现在引进新的辅助变量到讨论中来: 向量 $\boldsymbol{u}^* = (u^1,\cdots,u^{n-1})$ 及数量 u^n. 在变量 $(\boldsymbol{u}^*,u^n) = (u^1,\cdots,u^n)$ 的 n 维空间中, 考虑依赖于参数 s 及 $\boldsymbol{z}^*$ 的线性变换 M:

$$M(\boldsymbol{u}^*,u^n) = T^*(s)\boldsymbol{u}^* + (\boldsymbol{\varphi}'(s) + T^{*'}(s)\boldsymbol{z}^*)u^n.$$

当 $\boldsymbol{z}^* = 0$ 时, 变换 M 成为 $T(s)$, 因此当 $\boldsymbol{z}^*$ 接近于零时, 变换 M 是非退化的. 于是方程

$$M(\boldsymbol{u}^*,u^n) = \boldsymbol{R}(s,\boldsymbol{z}^*)$$

(当 $\boldsymbol{z}^*$ 接近于零时) 关于 $\boldsymbol{u}^*$ 和 u^n 是唯一可解的, 而它的解

$$\boldsymbol{u}^* = \boldsymbol{q}^*(s,\boldsymbol{z}^*),$$

$$u^n = q(s,\boldsymbol{z}^*)$$

关于 s 是以 2τ 为周期的周期函数, 而关于向量 $\boldsymbol{z}^*$ 是二阶无穷小量. 由于关系式 (31) 可以重写成形式:

$$M(\dot{\boldsymbol{z}}^* - B^*\boldsymbol{z}^*, \dot{s} - 1) = \boldsymbol{R}(s,\boldsymbol{z}^*),$$

因此我们得到:

$$\dot{\boldsymbol{z}}^* - B^*\boldsymbol{z}^* = \boldsymbol{q}^*(s,\boldsymbol{z}^*), \quad \dot{s} - 1 = q(s,\boldsymbol{z}^*).$$

于是, 在变量 $\boldsymbol{z}^*$, s 的空间中方程 (1) 可写成形式:

$$\dot{\boldsymbol{z}}^* = B^*\boldsymbol{z}^* + \boldsymbol{q}^*(s,\boldsymbol{z}^*), \tag{32}$$

$$\dot{s} = 1 + q(s,\boldsymbol{z}^*). \tag{33}$$

这时存在这样正数 ε, 使得当 $|\boldsymbol{z}^*| < \varepsilon$ 时, 余项 $\boldsymbol{q}(s,\boldsymbol{z}^*)$ 满足不等式 $|\boldsymbol{q}(s,\boldsymbol{z}^*)| < 1$. 当每个解 $\boldsymbol{z}^* = z^*(t)$, $s = s(t)$ 满足这个不等式时, 可以取 s 代替 t 作为自变量, 而因此方程 (32) 和 (33) 可重写成形式:

$$\frac{d\boldsymbol{z}^*}{ds} = \frac{B^*\boldsymbol{z}^* + \boldsymbol{q}^*(s,\boldsymbol{z}^*)}{1 + q(s,\boldsymbol{z}^*)},$$

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{1+q(s,\boldsymbol{z}^*)},$$

或者另一个形式:

$$\frac{d\boldsymbol{z}^*}{ds} = B^*\boldsymbol{z}^* + \boldsymbol{k}^*(s,\boldsymbol{z}^*), \tag{34}$$

$$\frac{dt}{ds} = 1 + k(s,\boldsymbol{z}^*), \tag{35}$$

其中余项 $\boldsymbol{k}^*(s,\boldsymbol{z}^*)$ 和 $k(s,\boldsymbol{z}^*)$ 关于 s 是以 2τ 为周期的周期函数, 而关于向量 $\boldsymbol{z}^*$ 是二阶无穷小量.

在方程组 (34) 和 (35) 中, 自变量是 s, 而 $\boldsymbol{z}^*$, t 看成是 s 的未知函数. 方程 (34) 不含有未知函数 t,, 因此它可以单独求解. 于是, 为了找出方程组 (32) 和 (33) 以 t_0, $\boldsymbol{z}_1^*$, s_1 为初始值的解, 应该首先找出方程 (34) 以 $\boldsymbol{z}_1^*$, s_1 为初始值的解 $\boldsymbol{z}^*(s,\boldsymbol{z}_1^*,s_1)$; 根据命题 (C), 当 $|\boldsymbol{z}_1^*|$ 充分小时, 这个解对所有值 $s \geqslant s_1$ 有定义, 且有估计式

$$|\boldsymbol{z}^*(s,\boldsymbol{z}_1^*,s_1)| \leqslant r|\boldsymbol{z}_1^*|e^{-\alpha s}. \tag{36}$$

然后, 应当找出方程 (35) 以 t_0, $\boldsymbol{z}_1^*$, s_1 为初始值的解; 这个解可由下面显然的公式给出:

$$\begin{aligned} t &= t_0 + \int_{s_1}^{s} (1 + k(s,\boldsymbol{z}^*(s,\boldsymbol{z}_1^*,s_1)))ds \\ &= t_0 - s_1 + s + \int_{s_1}^{s} k(s,\boldsymbol{z}^*(s,\boldsymbol{z}_1^*,s_1))ds. \end{aligned} \tag{37}$$

只要 $|\boldsymbol{z}_1^*|$ 充分小, 最后一个方程关于 s 是可以求解的, 所以我们得到:

$$s = s(t,\boldsymbol{z}_1^*,s_1). \tag{38}$$

将这一个关于 s 的表达式代入方程组 (34) 的解 $\boldsymbol{z}^*(s,\boldsymbol{z}_1^*,s_1)$, 即得:

$$\boldsymbol{z}^*(t) = \boldsymbol{z}^*(s(t,\boldsymbol{z}_1^*,s_1),\boldsymbol{z}_1^*,s_1). \tag{39}$$

公式 (38) 和 (39) 一起给出了方程组 (32), (33) 以 t_0, $\boldsymbol{z}_1^*$, s_1 为初始值的解. 由 (37) 得出, 当 $t \geqslant t_0$ 时我们有

$$|s(t,\boldsymbol{z}_1^*,s_1) - t| \leqslant |s_1 - t_0| + l|\boldsymbol{z}_1^*|^2, \tag{40}$$

其中 l 是某一正的常数. 在特殊情况下, 当 $\boldsymbol{z}_1^* = \mathbf{0}$, $s_1 = t_0$ 时, 解 (38) 和 (39) 有形式:

$$\boldsymbol{z}^*(t) = \mathbf{0}, \quad s(t) = t.$$

从估计式 (36) 和 (40) 得出, 方程组 (32), (33) 的这个解是李雅普诺夫稳定的.

将解 (38), (39) 代入变换公式 (28), 我们得到方程 (1) 以 $t=t_0, \boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_1=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{z}_1^*, s_1)$ 为初始值的解 $\boldsymbol{x}=\varphi(t, \boldsymbol{x}_1)$. 由于映射 (28) 在点对 $\boldsymbol{z}^*=\mathbf{0}$, $s=t_0$ 的某个邻域上是互相单值的, 所以方程 (1) 以 t_0, $\boldsymbol{x}_1$ 为初始值的任一解 $\boldsymbol{x}=\varphi(t, \boldsymbol{x}_1)$, 当 $|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0|$ 充分小时, 可以用这样的方法从方程组 (32), (33) 的某个解 (38), (39) 得到. 这时, 解 $\boldsymbol{x}=\varphi(t)$ 是从解 $\boldsymbol{z}^*=\mathbf{0}$, $s\equiv t$ 得到的. 这时从解 $\boldsymbol{z}^*=0$, $s\equiv t$ 的李雅普诺夫稳定性 (由变换 (28) 的一致连续性) 推出周期解 $\boldsymbol{x}=\varphi(t)$ 的李雅普诺夫稳定性.

于是定理 26 得证.

把这里所得的结果应用于极限环的情形.

(D) 我们假设自治方程组 (1) (见 (3)) 是二阶的:

$$\dot{x}^i=f^i(x^1,x^2)=f^i(\boldsymbol{x}), \quad i=1,2,$$

并令

$$\boldsymbol{x}=\varphi(t)$$

是它的以 τ 为周期的周期解. 这时方程组 (7) 有形式:

$$\dot{y}^i=\frac{\partial f^i(\varphi t))}{\partial x^1}y^1+\frac{\partial f^i(\varphi(t))}{\partial x^2}y^2, \quad i=1,2,$$

根据命题 (A), 这个方程组有一个特征数等于 1, 把第二个特征数记为 λ. 于是可以证明

$$\lambda=\exp\left(\int_0^\tau\left(\frac{\partial f^i(\varphi(t))}{\partial x^1}+\frac{\partial f^i(\varphi(t))}{\partial x^2}\right)dt\right). \tag{41}$$

因此, 如果

$$\int_0^\tau\left(\frac{\partial f^i(\varphi(t))}{\partial x^1}+\frac{\partial f^i(\varphi(t))}{\partial x^2}\right)dt<0,$$

那么周期解 $\boldsymbol{x}=\varphi(t)$ 是李雅普诺夫稳定的. 事实上 (见下面的例题), 存在周期解 $\boldsymbol{x}=\varphi(t)$ 的后继函数 $\chi(u)$ (见 § 28), 使得

$$\chi'(u_0)=\lambda, \tag{42}$$

因此当 $\lambda\neq 1$ 时, 周期解 $\boldsymbol{x}=\varphi(t)$ 是粗极限环. 它当 $\lambda<1$ 时是稳定的, 而当 $\lambda>1$ 时是不稳定的.

我们来证明等式 (41) . 方程 $\dot{Y}=A(t)Y$ 以 $\Psi(0)=E$ (见 (A)) 为初始值的解 $Y=\Psi(t)$ 的根本矩阵 C 由等式

$$C=\Psi(\tau).$$

给出. 根据刘维尔公式我们有

$$\operatorname{Det}\Psi(\tau)=\operatorname{Det}\Psi(0)\cdot\exp\left(\int_0^\tau S(t)dt\right),$$

其中

$$S(t)=a_1^1(t)+a_2^2(t)=\frac{\partial f^1(\varphi(t))}{\partial x^1}+\frac{\partial f^2(\varphi(t))}{\partial x^2}$$

(见 § 17 的命题 (G)). 在我们现在的情况下, 矩阵 C 是二阶的, 且有一个特征值等于 1 , 而另一个等于 λ, 因此我们有

$$\lambda=\operatorname{Det} C=\exp\left(\int_0^\tau\left(\frac{\partial f^1(\varphi(t))}{\partial x^1}+\frac{\partial f^2(\varphi(t))}{\partial x^2}\right)dt\right).$$

例题

设 $\varphi(t)$ 是自治方程组 (1) (见 (3)) 以 τ 为周期的周期解, 它的初始值是 t_0, $\boldsymbol{x}_0$; 记这个方程组以 t_0, $\boldsymbol{\xi}$ 为初始值的解为 $\varphi(t,\boldsymbol{\xi})$. 对于解 $\varphi(t)$, 我们来构造类似的后继函数 (见 § 28), 它现在是变量 $u^1,\cdots,u^{n-1}$ 的 $n-1$ 维空间变到自身的映射.

设

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{g}(u);\quad \boldsymbol{u}=(u^1,\cdots,u^{n-1}) \tag{43}$$

是一个曲面的方程, 它与轨线 $\varphi(t)$ 相交于唯一的一点

$$\boldsymbol{x}_0=\varphi(t_0,\boldsymbol{x}_0)=\boldsymbol{g}(u_0), \tag{44}$$

且在这一点处不与轨线 $\varphi(t)$ 相切, 所以向量

$$\dot{\varphi}(t_0),\frac{\partial \boldsymbol{g}(\boldsymbol{u}_0)}{\partial u^1},\cdots,\frac{\partial \boldsymbol{g}(\boldsymbol{u}_0)}{\partial u^{n-1}} \tag{45}$$

是线性无关的. 当 $|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_0|$ 充分小时, 我们寻找轨线 $\varphi(t,\boldsymbol{g}(\boldsymbol{u}))$ 与曲面 (43) 当 t 靠近 $t_0+\tau$ 时的交点. 令 $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{v})$ 就是这个交点, 于是关系式

$$\varphi(t,\boldsymbol{g}(\boldsymbol{u}))-g(\boldsymbol{v})=0, \tag{46}$$

正确. 当 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}_0$ 时, 我们有方程 (46) 的显然解:

$$t=t_0+\tau,\quad \boldsymbol{v}=\boldsymbol{u}_0$$

(见 (4) 和 (44)). 这里我们把 $\boldsymbol{u}$ 看成自变量, 而 t, $\boldsymbol{v}$ 看作未知量. 根据 (45) 的线性无关性, 方程组 (46) 关于未知函数 t 和 $\boldsymbol{v}$ 的函数行列式当 $t=t_0+\tau$, $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}_0$, $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{u}_0$ 时不等于零, 所以当 $|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_0|$ 充分小时方程组 (46) 存在解

$$t=t(\boldsymbol{u}),\quad \boldsymbol{v}=\boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{u}),$$

而且 $|t(\boldsymbol{u})-(t_0+\tau)|$ 和 $|\boldsymbol{\chi}(u)-\boldsymbol{u}_0|$ 都很小. 我们称变量 $u^1,\cdots,u^{n-1}$ 空间到其自身的映射 $\boldsymbol{\chi}(u)$ (当 $|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_0|$ 很小时有定义) 为**后继映射**. 方程

$$\boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{u})-\boldsymbol{u}=0 \tag{47}$$

的每一个解 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}_1$ 都对应着自治方程组 (1) (见 (3)) 的一个周期解 $\boldsymbol{\varphi}(t,\boldsymbol{g}(\boldsymbol{u}_1))$, 它的周期接近 τ; 特别, 解 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}_0$ 对应于原先的周期解 $\boldsymbol{\varphi}(t)=\boldsymbol{\varphi}(t,\boldsymbol{g}(\boldsymbol{u}_0))$. 如果函数矩阵

$$M=\left(\frac{\partial\chi^i(\boldsymbol{u}_0)}{\partial u^j}\right),\quad i,j=1,\cdots,n-1$$

没有等于 1 的特征值, 那么方程 (47) 的解 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}_0$ 是孤立的. 实际上, 方程 (47) 的函数矩阵当 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}_0$ 时等于

$$M-E^*.$$

为了使得这个矩阵的行列式不等于零, 其必要和充分条件是矩阵 M 没有等于 1 的特征值.

现在来搞清楚是否所有邻近于由 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ 所描述的轨线 K 的周期轨线 K_1, 都是由解 $\boldsymbol{\varphi}(t,\boldsymbol{g}(\boldsymbol{u}_1))$ 来描述的问题, 其中 $\boldsymbol{u}_1$ 是方程 (47) 的解. 在平面的情况下 ($n=2$) 确实失真. 可以证明, 当 $n\geqslant 3$ 时情况已不是这样了. 我们来分析这个问题. 把 τ 看作解 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ 的最小周期, 也就是等式

$$\boldsymbol{\varphi}(t_0+t)=\boldsymbol{\varphi}(t_0)$$

仅当 $t=k\tau$ 时才成立, 其中 k 是整数 (见 §15, (C)). 如果轨线 K_1 靠近轨线 K, 那么它与曲面 (43) 相交于某一点 $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{u}_1)$, 而且 $|\boldsymbol{u}_1-\boldsymbol{u}_0|$ 接近于零. 令

$$\boldsymbol{u}_2=\boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{u}_1),\ \boldsymbol{u}_3=\boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{u}_2),\ \cdots,\ \boldsymbol{u}_{i+1}=\boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{u}_i),\cdots.$$

因为轨线 K_1 是闭的, 所以在这序列中可以找到与点 u_1 重合的点, 设 u_{k+1} 是第一个这样的点. 于是轨线 K_1 由解 $\boldsymbol{\varphi}(t,\boldsymbol{g}(\boldsymbol{u}_1))$ 来描写, 而且它的最小周期接近于数 $k\tau$; 解 $\boldsymbol{\varphi}(t,\boldsymbol{g}(\boldsymbol{u}_1))$ 仅当沿轨线 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ 绕行 k 次后才回到原来的位置. 在平面的情况下, 仅可能有 $k=1$ 的情形. 我们称 k 是轨线 K_1 的**重数**. 为了找出**二重**轨线, 需要求解的不是方程 (47) 而是方程

$$\boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{u}))-\boldsymbol{u}=\mathbf{0};$$

为了找出三重轨线, 需要求解方程

$$\boldsymbol{\chi}[\boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{u}))]-\boldsymbol{u}=\mathbf{0}$$

等等. 函数 $\boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{u}))$, $\boldsymbol{\chi}[\boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{u}))]$, $\cdots$ 称为函数 $\boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{u})$ 的**迭代**; 记 k 重迭代为 $\boldsymbol{\chi}^k(\boldsymbol{u})$. 因此, 为了求得靠近解 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ 的所有 k 重周期解, 应当求解方程

$$\boldsymbol{\chi}^k(\boldsymbol{u})-\boldsymbol{u}=\mathbf{0},\tag{48}$$

但是从方程 (48) 的所有解中, 应当只选取那些不是前面重数的方程的解; 方程 (47) 的解 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}_0$ 也是所有方程 (48) 的解. 方程 (48) 的函数矩阵当 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}_0$ 时显然等于 M^k-

E^*; 因此, 为了使得方程 (48) 只有一个靠近 $\boldsymbol{u}_0$ 的解 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_0$, 只需矩阵 $M^k - E^*$ 的行列式不等于零, 或者同样地, 只需矩阵 M^k 没有等于 1 的特征值, 最后, 或者矩阵 M 没有特征值等于 $\sqrt[k]{1}$. 因此, 为了在轨线 K 的邻近没有给定重数 k 的周期轨线, 只需矩阵 M 没有等于 $\sqrt[k]{1}$ 的特征值就行了. 特别, 如果 M 的所有特征值按模都小于 1, 那么它就没有这样的特征值.

从上面的讨论看出, 矩阵 M 在研究方程 (1) (见 (3)) 接近周期解 $\varphi(t)$ 的轨线时起了多么重要的作用. 我们现在证明, 如果方程 (7) 有一个单重的特征数等于 1, 那么在曲面 (43) 的某种选择下, 矩阵 M 和矩阵 C^* (见 (23)) 是相同的. 令

$$\psi_j^i(t) = \left.\frac{\partial \varphi^i(t, \boldsymbol{\xi})}{\partial \xi^j}\right|_{\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{x}_0}; \quad \Psi(t) = (\psi_j^i(t)).$$

于是根据 § 24 的命题 (C), 我们有

$$\dot{\Psi}(t) = A(t)\Psi(t), \tag{49}$$

而且满足初始条件:

$$\Psi(t_0) = E.$$

因此矩阵 $\Psi(t)$ 是矩阵方程 (49) 的解, 显然方程 (49) 是方程 (7) 的矩阵形式, 所以

$$\Psi(t_0 + \tau) = C.$$

由于矩阵 C 有一个单重的特征值 1, 所以可在向量 $\boldsymbol{y}$ 的空间中 (见 (A)) 选择这样的基底, 使得矩阵 C 写成 (23) 的形式. 令

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\varphi}(t_0) + \boldsymbol{y}$$

(与 (5) 比较) 之后, 选取向量 $\boldsymbol{y}$ 的分量作为方程 (1) (见 (3)) 在相空间中的坐标. 用这种方法得到的在相空间中坐标仍然记为 $x^1, \cdots, x^n$, 而曲面 (43) 由方程

$$x^1 = u^1, \cdots, x^{n-1} = u^{n-1}, x^n = 0.$$

给出. 假设在关系式 (46) 中 $t = t(\boldsymbol{u})$ 和 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{u})$ 是变量 $u^1, \cdots, u^{n-1}$ 的函数, 关系式 (46) 对 $u^1, \cdots, u^{n-1}$ 求导, 并令 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$, $t = t_0 + \tau$, $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$, 我们得到等式

$$C^* = M. \tag{50}$$

在当 $n = 2$ 的情况下, 矩阵 C^* 就是数量 λ, 而关系 (50) 给出等式 (42).

如果矩阵 C^* 的所有特征值按模都小于 1, 那么在轨线 K 的附近没有任何重数的周期解. 这是从估计式 (36) 得到的.

附录 I　若干分析问题

本附录共有两节, 分别针对两个完全不同的分析问题.

在 §32 中介绍了一些最基本的内容, 涉及到多变量空间中连续性概念, 其中开集占有很重要的地位, 它的重要意义在于, 微分方程的右端是在开集中给出的, 依赖于参数的解也是在开集中唯一确定的 (参看定理 13). 所以准确地理解开集对于把握微分方程解的存在定理是相当必要的.

在 §33 中证明了隐函数存在定理和介绍了它的一些应用.

在这两节中所涉及的问题并非相当深入, 也不是分析课程中最重要的. 但作为本书的附录还是很必要的.

§32. 欧氏空间的拓扑性质

在分析课程中几何的描述或者解析式的几何说明起着很重要的作用. 几何的解释能够建立解析式和几何图像之间的联系, 同样, 几何的直觉可以帮助分析. 解析几何建立了解析式和几何图像之间的联系. 直观地说, 几何图像可以在平面和空间中进行讨论, 但是多元分析用到是几何的语言和在多维空间中进行讨论. 在这里我们将讨论多维的欧氏空间, 同时可以把它们看作向量空间. 拓扑性质是几何图像的最重要的几何性质. 在这里仅对简单的性质进行讨论.

欧氏空间

首先简单提一下 n 维欧氏空间的概念.

(A)　由 n 个实数所构成的序列称为 n 维向量, 而这些实数称为向量的坐标. 通常用相同字母和不同的上标来记, 例如, x^1, x^2, $\cdots$, x^n, 而向量本身或用字母上面带

箭头符号, 或以黑体字母例如 $\boldsymbol{x}$ 来表示, 即

$$\boldsymbol{x}=(x^1,x^2,\cdots,x^n).$$

所有 n 维向量的全体称为 n 维向量空间, 用大写的字母 R 来记. 两个向量

$$\boldsymbol{x}=(x^1,x^2,\cdots,x^n),\quad \boldsymbol{y}=(y^1,y^2,\cdots,y^n)$$

的和与差定义为:

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=(x^1+y^1,x^2+y^2,\cdots,x^n+y^n),$$
$$\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}=(x^1-y^1,x^2-y^2,\cdots,x^n-y^n).$$

向量 $\boldsymbol{x}$ 与实数 α 的乘积定义为

$$\alpha\boldsymbol{x}=(\alpha x^1,\alpha x^2,\cdots,\alpha x^n).$$

所有分量为 0 的向量称为 $\boldsymbol{0}$ 向量 (读作: 零向量), 它在向量空间中有特殊的意义. 这样就在向量空间中定义了向量的加减法和数乘的代数运算. 在欧氏向量空间中还定义了两个向量的数量积运算, 任意两个向量 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 的数量积定义为一个数, 写成

$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=x^1y^1+x^2y^2+\cdots+x^ny^n.$$

如果向量 $\boldsymbol{y}$ 和向量 $\boldsymbol{x}$ 一样, 就得到该向量的数量平方 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^2$, 它总是非负的. 并且当 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 时, 它为零. 向量 $\boldsymbol{x}$ 的长度或者模定义为

$$|\,\boldsymbol{x}\,|=+\sqrt{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})}.$$

我们常常称向量为欧氏空间 R 中的点. 向量 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 差的模, 也就是数 $|\,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\,|$ 为两点 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 之间的距离.

往下将建立欧氏空间中关于数量积的基本不等式.

(B) 对欧氏空间中的任意两个向量 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$, 有不等式:

$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})^2\leqslant\boldsymbol{x}^2\boldsymbol{y}^2,\tag{1}$$

$$|\,\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\,|\leqslant|\,\boldsymbol{x}\,|+|\,\boldsymbol{y}\,|,\tag{2}$$

而对欧氏空间的任意三个点 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 有不等式

$$|\,\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}\,|\leqslant|\,\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\,|+|\,\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}\,|.\tag{3}$$

为了证明第一个不等式, 考察向量 $\alpha\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$, 其中 α 是任意实数, 并且给出这个向量的数量平方的形式:

$$(\alpha\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})^2=\alpha^2\boldsymbol{x}^2+2\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+\boldsymbol{y}^2.$$

因为向量的数量平方不可能为负, 所以不等式右端无论 α 取什么样的值都不可能为负, 所以二次方程

$$\alpha^2\boldsymbol{x}^2+2\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+\boldsymbol{y}^2=0$$

关于未知变量 α 不可能有两个不同的实根. 由此可得, 该二次方程的判别式 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})^2-\boldsymbol{x}^2\boldsymbol{y}^2$ 非正, 这就意味着不等式 (1) 成立.

为了证明不等式 (2), 对它的左边进行平方

$$|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}|^2=(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})^2=\boldsymbol{x}^2+2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+\boldsymbol{y}^2.$$

根据不等式 (1) 可得

$$|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}|^2\leqslant|\boldsymbol{x}|^2+2|\boldsymbol{x}||\boldsymbol{y}|+|\boldsymbol{y}|^2=(|\boldsymbol{x}|+|\boldsymbol{y}|)^2,$$

由此直接可得不等式 (2) (因为 $|\boldsymbol{x}|$, $|\boldsymbol{y}|$ 都非负).

为了证明不等式 (3), 只要在不等式 (2) 中令 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$ 即可.

于是命题 (B) 得证.

欧氏空间的开集, 闭集和有界子集

简单提一下集合交、并运算的定义. 这里所指的集合是指欧氏空间 R 中的集合. 假设

$$M_1, M_2, \cdots, M_k \tag{4}$$

是任意的空间 R 中的有限集合系.

集合 S 称为 (4) 的并, 如果 R 中的点 $\boldsymbol{x}$ 属于 S 当且仅当 $\boldsymbol{x}$ 至少属于 (4) 中的一个.

集合 P 称为 (4) 的交, 如果 R 中的点 $\boldsymbol{x}$ 属于 P 当且仅当 $\boldsymbol{x}$ 属于 (4) 中的每一个.

假设 M 是 R 中的任意集合.

集合 D 称为是集合 M 的补集, 如果 R 中的点 $\boldsymbol{x}$ 不属于 M 当且仅当 $\boldsymbol{x}$ 属于 D. 显然集合 D 的补集就是 M.

假设

$$D_1, D_2, \cdots, D_k \tag{5}$$

是集合系 (4) 的补系, 意即 D_i 是集合 M_i 的补集, 容易看出集合系 (5) 的交是集合系 (4) 并的补. 反之, 集合系 (4) 交的补是集合系 (5) 的并.

往下建立欧氏空间中集合最简单的拓扑性质. 这些性质基本上是同欧氏空间 R 中的开集、闭集相联系的.

(C) 假设 $\boldsymbol{a}$ 是欧氏空间中的任意点并且 r 是任意正数. R 中所有到 $\boldsymbol{a}$ 距离小于 r 的点的集合称为中心在 $\boldsymbol{a}$ 半径为 r 的球. 中心为 $\boldsymbol{a}$ 的任何球称为点 $\boldsymbol{a}$ 的邻域.

邻域的概念还能推广 (参看例 3). 如果对集合 G 的任一点 $\boldsymbol{a}$, 存在它的完全属于 G 的一个邻域, 则集合 G 称为空间 R 的开集. 假设 M 是集合 R 的任意一个子集, 如果 R 中点 $\boldsymbol{a}$ 的每个邻域包含不同于自身的集合 M 中的点, 则点 $\boldsymbol{a}$ 就称为集合 M 的极限点. 这时点 $\boldsymbol{a}$ 的每个邻域一定含有集合 M 的无限多个点. 如果点集 F 的每个极限点都属于自身, 则点集 F 称为闭集. 事实上, 任何开集的补集是闭集, 而任何闭集的补集是开的.

现在证明命题 (C). 我们首先证明: 如果点 $\boldsymbol{a}$ 的每个领域至少含有集合 M 不同于 $\boldsymbol{a}$ 的一个点, 那么该领域一定含有集合 M 的无限多个点. 假设 U_1 是点 $\boldsymbol{a}$ 的任意一个半径为 r_1 的邻域, $\boldsymbol{x_1}$ 是集合 M 中不同于 $\boldsymbol{a}$ 的点并包含在 U_1 中. 因为 $\boldsymbol{x_1} \neq \boldsymbol{a}$, 所以 $|\boldsymbol{x_1} - \boldsymbol{a}| = r_2 > 0$. 中心在点 $\boldsymbol{a}$ 半径为 r_2 的球 U_2 不含点 $\boldsymbol{x_1}$ 但它含有集合 M 不同于 $\boldsymbol{a}$ 的某个点 $\boldsymbol{x_2}$. 继续这个过程就可得到无限序列 $\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_k, \cdots$, 该序列中的所有点取自于 M, 包含在 U_1 且两两不同.

现证命题 (C) 中最后一个结论. 假设 G 是 R 的某个集合, F 是它的补集, G 是开集. 证明 F 是闭集. 设 $\boldsymbol{a}$ 是集合 F 的极限点, 则 $\boldsymbol{a}$ 不属于集合 G. 如若不然, 由于集合 G 是开的, 就一定存在完全属于 G 的点 $\boldsymbol{a}$ 的某个邻域, 它不含 F 的任何点, 这就意味着点 $\boldsymbol{a}$ 不是 F 的极限点, 矛盾于假设. 所以 $\boldsymbol{a}$ 属于集合 F.

现在假设集合 F 是闭的, 证明集合 G 是开的. 假设 $\boldsymbol{a}$ 是 G 的任意点, 因为它不属于集合 F, 根据闭性它不是 F 的极限点并且存在点 $\boldsymbol{a}$ 的某个邻域, 它不含 F 的任何点, 所以该邻域整个都含在 G 中. 这样就证明集合 G 是开的.

于是命题 (C) 证毕.

显然空间 R 既是开集又是闭集. 而 R 中的每个有限点集 F 都是闭集. 事实上, 一般而言集合 F 没有极限点, 所以它包含一切极限点, 也就是说它是闭的.

当向量空间 R 一维时, 它就同所有的实数集相一致, 此时定义在向量上的代数运算就是在实数上通常的运算, 而向量的模就成了数的模. 这时两点 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 之间的距离就成为两个数差的绝对值 $|\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}|$. 直接看得出, 在实数空间中满足不等式 $\boldsymbol{x} < \alpha$ 或者不等式 $\boldsymbol{x} > \alpha$ 的所有点 $\boldsymbol{x}$ 的集合是开集, 其中 α 是某个固定的数. 由不等式 $\boldsymbol{x} \geqslant \alpha$ 或者 $\boldsymbol{x} \leqslant \alpha$ 所确定的集合是闭的.

(D) 欧氏空间 R 中有限个开集的并和交是开的, 有限个闭集的并和交是闭的.

为了证明命题 (D), 假设

$$G_1, G_2, \cdots, G_k \tag{6}$$

是空间 R 中有限个开集, 证明它们的并是开的. 假设 $\boldsymbol{a}$ 是属于该并集的任意点, 则它至少属于 (6) 中一个集合, 不妨属于 G_i. 因为 G_i 是开的, 所以 G_i 中存在包含点 $\boldsymbol{a}$ 的某个邻域, 显然该邻域也包含在 (6) 的并集中.

证明 (6) 的交集也是开的. 假设 $\boldsymbol{a}$ 是该交集的任意一点, 那么它属于 (6) 的每一个集合 G_i. 因为集合 G_i 是开的, 所以存在中心在 $\boldsymbol{a}$ 半径为 r_i 的完全包含在 G_i

中的球. 令 r 是有限个数 $r_1, r_2, \cdots, r_k$ 中的最小的一个, 那么中心在 $\boldsymbol{a}$ 半径为 r 的球就包含在 (6) 的每一个集合中, 所以该球属于它们的交, 由此 (6) 的交集是开的.

现在从开集 (6) 转向它们的补集, 就可得到关于闭集的一系列结果 (参看 (C)). 于是命题 (D) 得证.

(E) 假设 R 是欧氏空间,

$$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_k, \cdots \tag{7}$$

是 R 中的某一个无限点列, M 是 R 中某个点集. 注意到序列与集合的不同之处不仅在于序列由点排列而成, 而且具有不同下标的点可能是一样的, 所以被写成无限序列的所有点的集合本质上不同于序列本身. 特别它可能是有限的. 如果存在这样的数 r, 使得序列 (7) 的每个点满足不等式 $|\boldsymbol{a}_k| < r$, 那么序列 (7) 称为有界的. 同样, 如果存在这样的数 r, 使得 M 中每个点 $\boldsymbol{x}$ 满足不等式 $|\boldsymbol{x}| < r$, 则集合 M 称为有界的. 如果有下面关系式成立

$$\lim_{k\to\infty} |\boldsymbol{a}_k - \boldsymbol{a}| = 0, \tag{8}$$

那么称序列 (7) 收敛到 R 的点 $\boldsymbol{a}$. 如果在这种情况下序列 (7) 含有无限个不同点, 那么点 $\boldsymbol{a}$ 是序列 (7) 所有点的极限并且是该集合的唯一极限点. 事实上, 有界的点列总是存在收敛的子序列. 由此直接可得任何有界无限集合 M 都有极限点.

我们来证明命题 (E), 假设 (8) 式成立, 并且序列 (7) 所有点集 A 是无限的. 从 (8) 式可得, 中心在 $\boldsymbol{a}$ 的每个球包含了序列 (7) 中除有限个点外的其余所有点. 因为集合 A 是无限的, 所以, 点 $\boldsymbol{a}$ 的每个邻域都含有 A 中的无限点集. 所以点 $\boldsymbol{a}$ 的每个邻域都含有不同于 $\boldsymbol{a}$ 的点, 这就意味着点 $\boldsymbol{a}$ 是 A 的极限点.

现证点 $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{a}$ 不可能是 A 的极限点. 不妨假设 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 之间的距离为 2ρ. 因为 $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{b}$, 所以 $\rho > 0$, 并且中心在 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 半径为 ρ 的球 P 和 Q 不相交. 这可以由不等式 (3) 得出. 由上所述, 因为球 P 含有集合 A 除有限点外的所有的点, 所以球 Q 仅含有集合 A 的有限个点, 所以点 $\boldsymbol{b}$ 不是集合 A 的极限.

现在假设序列 (7) 有界, 则可从中选取收敛的子序列. 证明时将用到数列的结论, 把 (7) 中的每个点用坐标表示

$$\boldsymbol{a}_k = (a_k^1, a_k^2 \cdots, a_k^n), \quad k = 1, 2, \cdots,$$

因为序列 (7) 有界, 所以存在这样是数 r, 当 $|\boldsymbol{a}_k| < r$ 时, 有

$$|a_k^i| < r, \quad i = 1, 2, \cdots, n; \quad k = 1, 2, \cdots$$

所以数列

$$a_1^1, a_2^1, \cdots, a_k^1, \cdots \tag{9}$$

有界. 因此从中可以选取收敛的子序列. 为了不更改记号, 不妨认为被选取的子序列就是序列 (9), 结果有下列关系式.

$$\lim_{k\to\infty} a_k^1 = a^1,$$

其中 a^1 是某个数. 同样从数列

$$a_1^2, a_2^2, \cdots, a_k^2, \cdots \tag{10}$$

可以选出收敛的子序列. 不妨被选取的子序列就是序列 (10) 本身. 对下标 $1, 2, \cdots, n$ 继续这个过程, 可以找出序列 (7) 的子序列

$$\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_l, \cdots \tag{11}$$

对该子序列的坐标有下列极限式

$$\lim_{l\to\infty} b_l^i = a^i, \quad i = 1, 2, \cdots, n, \tag{12}$$

其中 a^i 是某个数.

假设 $\boldsymbol{a} = (a^1, \cdots, a^n)$. 由 (12) 可得

$$\lim_{l\to\infty} |\boldsymbol{b}_l - \boldsymbol{a}| = 0,$$

所以从序列 (7) 就可以找到收敛的子序列 (11).

最后将证明任何有界无限集 M 有极限点. 因为集合 M 无限, 所以从中可以选取无限序列

$$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_k, \cdots$$

该序列的所有点两两不同. 因为该序列有界, 可以选取收敛于点 $\boldsymbol{a}$ 的无限子序列

$$\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_l, \cdots \tag{13}$$

因为 (13) 的所有点两两不同, 所以点 $\boldsymbol{a}$ 是 (13) 所有点集的极限, 进而它是 M 的极限点.

于是命题 (E) 得证.

在若干问题上欧氏空间的有界闭子集很重要. 现证明这种子集的一个特性, 称为紧致性.

(F) 欧氏空间 R 的点集 M 称为紧的, 如果它的每一个无限子集都有属于集合 M 的极限点. 事实上, 集合 M 是紧集当且仅当它是有界闭集.

我们来证明命题 (F).

首先假设集合 F 是有界闭集, 并且 M 是它任意无限子集. 因为 (E), 集合 M 存在某个极限点 $\boldsymbol{a}$, 该点也是集合 F 的极限点. 因为 F 是闭集, 所以点 $\boldsymbol{a}$ 属于 F. 所以, 集合 F 的任何无限子集 M 一定有属于 F 的极限点, 这就意味着 F 是紧的.

现在假设集合 F 是紧的, 则它有界. 倘若不然, 则从 F 可以选取两两不同的点列,

$$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_k, \cdots, \tag{14}$$

并且

$$|\boldsymbol{a}_k| > k, \quad k = 1, 2, \cdots$$

假设 $\boldsymbol{a}$ 是 R 的任意点. 由不等式 (2) 推出 $|\boldsymbol{a}_k| \leqslant |\boldsymbol{a}_k - \boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{a}|$ 所以

$$|\boldsymbol{a}_k - \boldsymbol{a}| \geqslant k - |\boldsymbol{a}|$$

这就意味着从点 $\boldsymbol{a}$ 到点 $\boldsymbol{a}_k$ 的距离随 k 无限增长, 所以点 $\boldsymbol{a}$ 的任何邻域仅含集合 (14) 的有限个点. 进而集合 F 的无限子集 (14) 没有极限点, 这就与集合 F 的紧性矛盾.

最后证明紧集 F 是闭的. 假设 $\boldsymbol{c}$ 是它的极限点. 因为点 $\boldsymbol{c}$ 的每个邻域含有集合 F 的不同于 $\boldsymbol{c}$ 的点, 所以从 F 可以选取收敛于点 $\boldsymbol{c}$ 且两两不同的点列

$$\boldsymbol{c}_1, \cdots, \boldsymbol{c}_l, \cdots. \tag{15}$$

根据 (E), $\boldsymbol{c}$ 是点列 (15) 唯一的极限点, 并且由紧性该点列有属于 F 的极限点, 所以点 $\boldsymbol{c}$ 属于 F. 这样, 集合 F 的每个极限点属于自己, 这就说明 F 是闭的.

于是命题 (F) 得证.

连续映射

假设 A 和 B 是两个任意的集合. 如果 A 的每个点 $\boldsymbol{x}$ 完全对应于集合 B 中的点 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$, 则我们说给出了从集合 A 到集合 B 的一个映射 $\boldsymbol{f}$ (换言之在集合 A 上的函数 $\boldsymbol{f}$ 的值在集合 B 上). 如果 C 是 A 中的某个点集, 那么形如 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 所有点集称为在映射 $\boldsymbol{f}$ 下集合 C 的像 $\boldsymbol{f}(C)$, 其中 $\boldsymbol{x}$ 是 C 的任意一点. 如果 D 是集合 B 中的某个点集, 那么 A 中所有那些在映射 $\boldsymbol{f}$ 下其像 $f(\boldsymbol{x})$ 属于 D 的点 $\boldsymbol{x}$ 全体称为在映射 $\boldsymbol{f}$ 下的集合 D 的原像 $\boldsymbol{f}^{-1}(D)$.

(G) 假设 R 和 S 是两个欧氏向量空间, M 是 R 中某个点集, $\boldsymbol{f}$ 是 M 到空间 S 的映射. 对于 M 中的点 $\boldsymbol{a}$, 如果对每一个正数 ε 存在这样的正数 δ, 使得当 $|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}| < \delta$ (其中 $\boldsymbol{x}$ 是 M 中的任意点) 有 $|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})| < \varepsilon$, 则称映射 (函数) $\boldsymbol{f}$ 在集合 M 的点 $\boldsymbol{a}$ 连续. 如果函数 $\boldsymbol{f}$ 在集合 M 上每点 $\boldsymbol{a}$ 连续, 则称函数 $\boldsymbol{f}$ 在整个集合 M 上连续. 如果对任何正数 ε 存在相应正数 δ, 当 $|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2| < \delta$ (其中 $\boldsymbol{x}_1$ 和 $\boldsymbol{x}_2$

是 M 中的任意点) 有 $|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1)-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_2)|<\varepsilon$, 则称函数 $\boldsymbol{f}$ 为一致连续的. 显然一致连续的函数是连续的. 往下把向量写成分量形式, 记

$$\boldsymbol{x}=(x^1,\cdots,x^p),\quad \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=(f^1(\boldsymbol{x}),\cdots,f^q(\boldsymbol{x})),$$

其中 p 和 q 是欧氏空间 R 和 S 中相应的维数. 这样可以用具有 p 个变量的 q 个函数来替换向量变量 $\boldsymbol{x}$ 的向量函数 $\boldsymbol{f}$

$$f^j(\boldsymbol{x})=f^j(x^1,\cdots,x^p),\quad j=1,\cdots,q. \tag{16}$$

容易证明向量函数 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 的连续性等价于所有多变量函数 (16) 的连续性. 关于一致连续性也是同样的, 在这里不作讨论.

(H) 假设 R 和 S 是两个欧氏向量空间, $\boldsymbol{f}$ 是 R 中某个开集 G 到空间 S 的连续映射. 则空间 S 的任何开集 H 的原像 $\boldsymbol{f}^{-1}(H)$ 是空间 R 中的开集.

为了证明这一点, 假设 H 是集合 S 中的任意开集, $\boldsymbol{a}$ 是集合 $\boldsymbol{f}^{-1}(H)$ 的任意点. 因为 H 是开集, 点 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$ 属于它, 所以存在包含在 H 中的点 $\boldsymbol{b}$ 的邻域 V. 邻域 V 是中心在 $\boldsymbol{b}$, 半径为某个正数 ε 的球. 根据映射 $\boldsymbol{f}$ 的连续性, 存在这样的正数 δ 当 $|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}|<\delta$(这里 $\boldsymbol{x}$ 是 G 中的点), 有 $|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})|<\varepsilon$. 又因为 $\boldsymbol{a}$ 是开集 G 的点, 所以存在中心在 $\boldsymbol{a}$ 半径为 r 含在 G 中的球. 令 s 是数 δ 和 r 的较小的数, 那么中心在 $\boldsymbol{a}$ 半径为 s 的球显然包含在集合 $\boldsymbol{f}^{-1}(H)$ 中, 由此可得该集合是开的.

(I) 假设 R 和 S 是两个欧氏向量空间, F 是 R 中有界闭集 (也就是紧集), $\boldsymbol{f}$ 是集合 F 到空间 S 的连续映射. 那么映射 $\boldsymbol{f}$ 是一致连续的, 而集合 $\boldsymbol{f}(F)$ 是有界闭集 (紧集). 特别, 定义在紧集 F 上的连续数值函数 f 有最大和最小值.

首先证明映射 $\boldsymbol{f}$ 是一致连续的. 如若不然, 存在这样的正数 ε, 对于任意正数 δ, 存在 F 中的两点 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{x}$ 当 $|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}|<\delta$ 时有 $|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})|\geqslant\varepsilon$. 由此可以构造无限个点列

$$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_k,\boldsymbol{x}_k,\cdots,$$

满足条件

$$|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_k)-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}_k)|\geqslant\varepsilon,\quad k=1,2,\cdots, \tag{17}$$

$$\lim_{k\to\infty}|\boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{a}_k|=0. \tag{18}$$

因为序列 $\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_k,\cdots$ 包含在有界闭集 F 中, 所以从中可以选取 F 中收敛于某个点 $\boldsymbol{a}$ 的子序列. 为了不改变记号, 不妨认为序列 $\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_k,\cdots$ 就是收敛于 $\boldsymbol{a}$ 的子序列.

因为函数 $\boldsymbol{f}$ 在点 $\boldsymbol{a}$ 连续, 所以存在正数 δ, 当 $|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}|<\delta$ 时有 $|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})|<\varepsilon$. 又因为序列 $\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_k,\cdots$ 收敛于 $\boldsymbol{a}$ 并且 (18) 式成立, 可以找到充分大的 k 当 $|\boldsymbol{a}_k-\boldsymbol{a}|<\delta$, $|\boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{a}|<\delta$ 时 (参看 (3)) 对这样的 k 我们有

$$|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_k)-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}_k)|<|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_k)-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})|+|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}_k)-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})|<2\cdot\frac{\varepsilon}{2},$$

这就与 (17) 式矛盾, 所以映射 $\boldsymbol{f}$ 是一致连续的.

最后证明集合 $\boldsymbol{f}(F)$ 是紧的. 假设 M 是 $\boldsymbol{f}(F)$ 中任意无限点集, 从集合 M 可以选取两两不同的无限序列

$$\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_k, \cdots \tag{19}$$

对该序列的每个点 $\boldsymbol{b}_k$ 可以找到 F 中相应的点 $\boldsymbol{a}_k$ 使得 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}_k) = \boldsymbol{b}_k$, $k = 1, 2, \cdots$. 点 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k, \ldots$ 也是两两不同的, 所以在集合 F 中具有极限点 $\boldsymbol{a}$. 可证点 $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$ 是集合 (19) 的极限. 假设 V 是点 $\boldsymbol{b}$ 的任意邻域, 也就是说它是中心在 $\boldsymbol{b}$ 半径为 $\varepsilon > 0$ 的球. 因为函数 $\boldsymbol{f}$ 在点 $\boldsymbol{a}$ 连续, 所以存在这样的正数 δ, 当 $|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}| < \delta$ (这里 $\boldsymbol{x}$ 是 F 的点) 时, 有 $|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})| \leqslant \varepsilon$. 又因为点 $\boldsymbol{a}$ 是点集 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_k, \ldots$ 的极限, 所以在中心为 $\boldsymbol{a}$ 半径为 δ 的球 U 中至少存在该集合的两个不同的点 $\boldsymbol{a}_k$ 和 $\boldsymbol{a}_l$. 点 $\boldsymbol{b}_k$ 和 $\boldsymbol{b}_l$ 属于球 V, 又因为 $\boldsymbol{b}_k$ 和 $\boldsymbol{b}_l$ 不等, 所以该两点中至少有一点不重合于点 $\boldsymbol{b}$, 这样, 点 $\boldsymbol{b}$ 的任意邻域 V 至少含有集合 (19) 的不同于 $\boldsymbol{b}$ 一个的点, 所以 $\boldsymbol{b}$ 是集合 (19) 的极限点, 进而它是集合 M 的极限点. 所以集合 $\boldsymbol{f}(F)$ 是紧的.

如果空间 S 的维数是 1, 那么 $\boldsymbol{f} = f$ 是数量函数, 这时, 集合 $f(F)$ 是实数集的有界闭集. 集合 $f(F)$ 的上下确界是有限的并且属于 $f(F)$. 这时集合 $f(F)$ 的上确界就是函数 $f(F)$ 的最大值而下确界就是它的最小值.

于是命题 (I) 证毕.

例题

讨论若干连续函数的例子.

1. 假设 R 和 S 是两个欧氏空间, 空间 R 中每个点 $\boldsymbol{x} = (x^1, \cdots, x^p)$ 对应于空间 S 中的点 $\boldsymbol{y} = (y^1, \cdots, y^q)$. 记

$$y^j = \sum_{i=1}^{p} a_i^j x^i + b^j, \quad j = 1, \cdots, q \tag{20}$$

这里 a_i^j 是矩阵 $A = (a_i^j)$ 的元素, 而 b^j 是向量 $\boldsymbol{b} = (b^1, \cdots, b^q)$ 的分量, 把 (20) 式写成向量的形式

$$\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}, \tag{21}$$

则关系式 (21) 称为空间 R 到空间 S 的仿射映射.

可证该仿射映射是连续的. 为简单起见, 把仿射映射记为 $\boldsymbol{f}$. 假设 $\boldsymbol{x}_1$ 和 $\boldsymbol{x}_2$ 是 R 中的两个点, 它们的距离为 $|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2| < \delta$, 需要估计在空间 S 中相应两点 $\boldsymbol{y}_1 = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1)$ 和 $\boldsymbol{y}_2 = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_2)$ 之间的距离. 我们有

$$\boldsymbol{y}_1 - \boldsymbol{y}_2 = A(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2),$$

或者写成分量的形式是

$$y_1^j - y_2^j = \sum_{i=1}^{p} a_i^j (x_1^j - x_2^j), \quad j = 1, \cdots, q. \tag{22}$$

假设 γ 是 $|a_i^j|$ 这些数中最大值, 所以对所有的 i, j 有 $|a_i^j| \leqslant \gamma$. 考虑到 $|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2| < \delta$, 所以 $|x_1^i - x_2^j| < \delta$. 根据等式 (22) 可得

$$|y_1^j - y_2^j| < p\gamma\delta, \quad j = 1, \cdots, q.$$

回到向量形式有 $|\boldsymbol{y}_1 - \boldsymbol{y}_2| < \delta p\gamma\sqrt{q}$. 只要取 $\delta < \dfrac{\varepsilon}{p\gamma\sqrt{q}}$ 就有不等式 $|\boldsymbol{y}_1 - \boldsymbol{y}_2| < \varepsilon$. 由此可见, 仿射映射不仅是连续的, 而且是一致连续的.

从证明看出 (参看 (H)), 如果 H 是空间 S 的某个开集, 那么在仿射映射 $\boldsymbol{f}$ 下它的原像 $\boldsymbol{f}^{-1}(H)$ 是 R 中的开集.

如果矩阵 A 是方阵 ($p = q$), 并且是非退化的 (行列式不等于零), 那么方程组 (20) 关于未知变量 $x^1, \cdots, x^p$ 是可解的. 这样, 向量 $\boldsymbol{x}$ 就可以由向量 $\boldsymbol{y}$ 唯一确定:

$$\boldsymbol{x} = C\boldsymbol{y} + \boldsymbol{d},$$

这就意味着仿射映射 $\boldsymbol{f}$ 的逆映射 $\boldsymbol{f}^{-1}$ 同样是仿射的. 这时空间 R 中的开集被映射成空间 S 中的开集, 同样空间 R 中的闭集 (开集的补) 被映射成空间 S 中的闭集 (开集的补). 如果把空间 R 到空间 S 的非退化仿射映射 $\boldsymbol{f}$ 看作是空间 R 中使得距离发生了改变的坐标变换, 那么可见空间的拓扑性质 (集合的开和闭) 不依赖于刻画两点之间距离的坐标系.

2. 假设 R 是欧氏空间, $\boldsymbol{a}$ 是它的某个非零向量. R 中每个向量 $\boldsymbol{x}$ 对应于数 $y = f(\boldsymbol{x})$, 记

$$y = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}).$$

显然函数 f 是空间 R 到实数空间的仿射映射, 并且是连续的. 所以, 任何开的实数集的原像是开集. 满足不等式 $y < \alpha$ 或者 $y > \alpha$ 的所有实数集 y 是开的. 而在空间 R 中该集的原像是由不等式 $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}) < \alpha$ 或者 $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}) > \alpha$ 来定义的, 这些不等式在空间 R 中定义了开的半空间, 这些半空间是由平面 $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}) = \alpha$ 划分空间 R 所得到的. 这些开的半空间的补是由不等式 $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}) \geqslant \alpha$ 和 $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}) \leqslant \alpha$ 定义的, 它们是闭的. 因为它们是开集的补集.

有限个不等式组

$$(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{x}) < \alpha_1, \quad \cdots, \quad (\boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{x}) < \alpha_k$$

确定了空间 R 中开的凸多边形 (一般来说非有界的), 其中 $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_k$ 是向量, $\alpha_1, \cdots, \alpha_k$ 是数. 它是开集, 因为它是由某些开的半空间的交所得的. 同样的, 有限个不等式组

$$(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{x}) \leqslant \alpha_1, \quad \cdots, \quad (\boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{x}) \leqslant \alpha_k$$

在空间 R 中定义了凸的闭多边形, 它是闭集. 因为它是闭的半空间交.

3. 假设 R 是欧氏空间, 而 L 和 M 是它的两个子集. 所有形如 $|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|$ 的数的下确界称为集合 L 和 M 之间的距离, 其中 $\boldsymbol{x}$ 是 L 中任意的点, 而 $\boldsymbol{y}$ 是 M 中任意的点. 如果集合 L 只含有一个点 $\boldsymbol{x}$, 那么我们就可以得到点 $\boldsymbol{x}$ 到集合 M 的距离 $f(\boldsymbol{x})$, 它是空间 R 中点 $\boldsymbol{x}$ 的数量函数.

易见, 点 $\boldsymbol{x}$ 到集合 M 的距离 $f(\boldsymbol{x})$ 为 0 当且仅当点 $\boldsymbol{x}$ 或者属于集合 M 或者是它的极限点. 由此可知, 当集合 M 是闭集, 由关系式 $f(\boldsymbol{x})=0$ 可得 $\boldsymbol{x}$ 属于 M.

现证点 $\boldsymbol{x}$ 到集合 M 的距离 $f(\boldsymbol{x})$ 是连续函数. 假设 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 是 R 中两个点, 它们之间的距离小于 ε: $|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|<\varepsilon$, $\boldsymbol{a}$ 是 M 中任意点, 由不等式 (3) 可得

$$f(\boldsymbol{x})\leqslant|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}|\leqslant|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|+|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{a}|.$$

因为该不等式对集合 M 的任意点都成立, 所以, 我们在它的右边换成下确界 (点 $\boldsymbol{a}$ 取遍整个集合 M), 不等式仍然正确

$$f(\boldsymbol{x})\leqslant|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|+f(\boldsymbol{y})<\varepsilon+f(\boldsymbol{y})$$

所以 $f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{y})<\varepsilon$. 同样可证明 $f(\boldsymbol{y})-f(\boldsymbol{x})<\varepsilon$. 从这两个不等式可得 $|f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{y})|<\varepsilon$. 所以从不等式 $|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|<\varepsilon$ 得到 $|f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{y})|<\varepsilon$, 这就说明函数 $f(\boldsymbol{x})$ 不仅是连续的而且是一致连续的.

由于点 $\boldsymbol{x}$ 到集合 M 的距离 $f(\boldsymbol{x})$ 是连续函数, 所以不等式 $f(\boldsymbol{x})<\alpha$ 和 $f(\boldsymbol{x})>\alpha$ 在空间 R 中定义了开集 (参看 (H)). 而它的补集由不等式 $f(\boldsymbol{x})\geqslant\alpha$ 和 $f(\boldsymbol{x})\leqslant\alpha$ 所定义, 所以由这些不等式所定义的集合是闭的. 特别由不等式 $f(\boldsymbol{x})\leqslant 0$ 所定义的集合 $\overline{M}$ 是闭的. 由集合 M 添加它所有极限点所得到的集合 $\overline{M}$ 称为集合 M 的闭包. 如果集合 M 有界, 那么由不等式 $f(\boldsymbol{x})\leqslant\alpha$ 所定义的集合不仅是闭的, 易见它是有界的.

如果有界闭集 F 与闭集 M 不相交, 那么这两个集合的距离为正. 为了证明该结论, 重新记 $f(\boldsymbol{x})$ 是点 $\boldsymbol{x}$ 到集合 M 的距离. 因为函数 $f(\boldsymbol{x})$ 连续, 所以在有界闭集 F 上它有最小值 m. 易见 m 就是集合 F 和 M 的距离. 现证 $m>0$. 假设 $\boldsymbol{a}$ 是 F 中的点, 并且 $f(\boldsymbol{a})=m$. 如果 $m=0$, 那么点 $\boldsymbol{a}$ 就属于集合 M (由它的封闭性), 而这是不可能的, 因为集合 F 和 M 不相交.

由于点 $\boldsymbol{x}$ 到任意集合 M 的距离 $f(\boldsymbol{x})$ 是连续函数, 因此特别当点 $\boldsymbol{x}$ 到点 $\boldsymbol{a}$ 的距离 $|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}|$ 是 $\boldsymbol{x}$ 的连续函数. 由此得出所有的球 (见 (C)) 都是开集. 在命题 (C) 中, 我们把中心在点 $\boldsymbol{a}$ 的任意球称为点 $\boldsymbol{a}$ 的邻域, 在很多情况下, 把含有点 $\boldsymbol{a}$ 的开集都认为是点 $\boldsymbol{a}$ 的邻域是非常方便的. 对于邻域概念的这种推广并不会影响极限点的定义.

§33. 隐函数存在定理

本节将证明著名的隐函数存在性和可微性定理. 这些定理应用广泛, 特别在本书中经常用到. 这里将用逐次逼近法 (或者压缩映射原理) 来证明隐函数的存在定

理. 该方法已经在 § 20 和 § 21 中采用过, 而隐函数可微性定理的证明用到阿达马引理 (见 § 24, (A)).

因此这节的所有内容衔接第四章的方法并且很好使用了它. 往下将讨论方程组

$$f^i(t^1,\cdots,t^k,x^1,\cdots,x^n)=0,\quad i=1,\cdots,n, \tag{1}$$

其中 $x^1,\cdots,x^n$ 为未知函数, $t^1,\cdots,t^k$ 为未知变量. 假设方程 (1) 的左端函数

$$f^i(t^1,\cdots,t^k,x^1,\cdots,x^n),\quad i=1,\cdots,n, \tag{2}$$

及所有的偏导数

$$\frac{\partial f^i}{\partial x^j},\quad i,j=1,\cdots,n \tag{3}$$

在空间 R 的某个开集 Γ 上关于变量 $t^1,\cdots,t^k,x^1,\cdots,x^n$ 有定义且连续.

记　$\boldsymbol{t}=(t^1,\cdots,t^k)$, $\boldsymbol{x}=(x^1,\cdots,x^n)$,

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{t},\boldsymbol{x})=(f^1(\boldsymbol{t},\boldsymbol{x}),\cdots,f^n(\boldsymbol{t},\boldsymbol{x})),$$

可以把方程组 (1) 写成向量形式

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{t},\boldsymbol{x})=\boldsymbol{0}. \tag{4}$$

我们称向量自变量 $\boldsymbol{t}$ 的任何连续的向量函数 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{t})$ 为方程 (4) 的解, 如果它在自变量 $\boldsymbol{t}$ 空间 G 的某个集合 T 上有定义且对所有开集上的点 $t^1,\cdots,t^k$, 满足方程 (4)

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{t},\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{t}))=\boldsymbol{0}. \tag{5}$$

定理 27　*假设行列式*

$$\left|\frac{\partial f^i(\boldsymbol{t},\boldsymbol{x})}{\partial x^j}\right|$$

在开集 Γ 上的每一点 $(\boldsymbol{t},\boldsymbol{x})$ 上不为零. 那么对开集 Γ 上满足条件

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{t}_0,\boldsymbol{x}_0)=\boldsymbol{0} \tag{6}$$

的每一点 $(\boldsymbol{t}_0,\boldsymbol{x}_0)$ 方程 (4) 存在满足条件

$$\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{t}_0)=\boldsymbol{x}_0 \tag{7}$$

的连续解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{t})$, 并且是唯一的. 即在含有点 $(\boldsymbol{t}_0,\boldsymbol{x}_0)$ 的空间 R 上存在这样的开集 U, 使得满足方程 (4) 的集合 U 的每一点 $(\boldsymbol{t},\boldsymbol{x})$ 同样满足方程 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{t})$. 换而言之, 在点 $(\boldsymbol{t}_0,\boldsymbol{x}_0)$ 附近没有满足方程 (4) 而不满足方程 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{t})$ 的点.

我们将用多变量向量函数列的一致收敛性来证明该定理. 在 §20 和 §21 中仅讨论单变量函数列, 所以在此我们将提一下多变量向量函数列 (参看 §21 (B)).

(A) 假设 F 是空间 T 的有界闭点集. 在集合 F 上给出的连续向量函数 $\boldsymbol{x} = \varphi(\boldsymbol{t})$ 模的最大值

$$\| \varphi \| = \max | \varphi(\boldsymbol{t}) |$$

称为它的范数. 利用范数的概念可以定义下面函数列的一致收敛性

$$\varphi_0, \varphi_1, \cdots, \varphi_i, \cdots, \tag{8}$$

其中每个元素都是定义在 F 上多变量的向量函数. 如果

$$\lim_{i \to \infty} \| \varphi - \varphi_i \| = 0.$$

那么函数列 (8) 一致收敛于定义在集合 F 上的连续函数 $\varphi(t)$. 函数列 (8) 一致收敛于某个连续函数的充要条件是满足不等式

$$\| \varphi_{i+1} - \varphi_i \| \leqslant a_i,$$

其中数 $a_0, a_1, \cdots, a_i, \cdots$ 构成收敛级数.

定理 27 的证明. 为了对方程 (4) 采用逐次逼近法, 把该方程写成其他形式. 为此假设

$$b_j^i = \frac{\partial}{\partial x^j} f^i(\boldsymbol{t}_0, \boldsymbol{x}_0), \quad i, j = 1, \cdots, n. \tag{9}$$

因为行列式

$$\left| \frac{\partial f^i(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{x})}{\partial x^j} \right|$$

在开集 Γ 的每点 $(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{x})$ 不为零, 所以矩阵 $B = (b_j^i)$ 有逆矩阵 B^{-1}. 我们把方程组 (1) 改写成

$$\sum_j b_j^i x^j = \sum_j b_j^i x^j - f^i(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{x}), \quad i = 1, \cdots, n; \tag{10}$$

并把 (10) 的右端记成 $h^i(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{x})$. 由关系式 (9) 可知

$$\frac{\partial}{\partial x^j} h^i(\boldsymbol{t_0}, \boldsymbol{x_0}) = 0, \quad i, j = 1, \cdots, n. \tag{11}$$

可以把方程 (10) 写成向量形式

$$B\boldsymbol{x} = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{x}) \tag{12}$$

对 (12) 两边同乘以矩阵 B^{-1} 可得它的等价形式

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{x}), \tag{13}$$

其中

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{t},\boldsymbol{x}) = (g^1(\boldsymbol{t},\boldsymbol{x}),\cdots,g^n(\boldsymbol{t},\boldsymbol{x})) = B^{-1}\boldsymbol{h}(\boldsymbol{t},\boldsymbol{x}).$$

由 (11) 可得

$$\frac{\partial}{\partial x^j} g^i(\boldsymbol{t_0},\boldsymbol{x_0}) = 0. \tag{14}$$

因为方程 (13) 等价于方程 (4), 点 (t_0, x_0) 满足方程 (4), 所以

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{t_0},\boldsymbol{x_0}) = \boldsymbol{x}_0. \tag{15}$$

可以对满足条件 (14), (15) 的方程 (13) 采用逐次逼近法. 也就是说, 在 (13) 中把每个向量函数 $\boldsymbol{x} = \psi^*(t)$ 代入 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{t},\boldsymbol{x})$, 也即

$$\boldsymbol{\psi}^*(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{t},\boldsymbol{\psi}^*(\boldsymbol{t})). \tag{16}$$

用算子记号把它写成

$$\psi^* = A\psi^*. \tag{17}$$

现在需要构造这样的连续函数 $\psi(t)$ 的集合 Ω, 使得算子 A 把该集合 Ω 中的每个函数映射到同样属于该集合的函数, 也就是说, 在该集合中算子 A 是压缩的.

选取两个正数 q 和 a, 使得当

$$|\boldsymbol{t}-\boldsymbol{t_0}| \leqslant q, \quad |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x_0}| \leqslant a \tag{18}$$

时点 $(\boldsymbol{t},\boldsymbol{x})$ 属于开集 Γ 并且满足不等式

$$\left|\frac{\partial}{\partial x^j} g^i(\boldsymbol{t},\boldsymbol{x})\right| \leqslant \frac{k}{n^2}, \quad i,j=1,\cdots,n, \tag{19}$$

其中 k 是满足条件 $0<k<1$ 的某个数. 这是能做到的, 因为集合 Γ 是开的, 而导数 $\frac{\partial}{\partial x^j} g^i(\boldsymbol{t},\boldsymbol{x})$ 连续并且在点 $(\boldsymbol{t_0},\boldsymbol{x_0})$ 上为零 (参看 (14)). 根据 §21 中 (6) 对集合 (18) 中任意两点 $(\boldsymbol{t},\boldsymbol{x})$ 和 $(\boldsymbol{t},\boldsymbol{y})$ 满足不等式

$$|\boldsymbol{g}(\boldsymbol{t},\boldsymbol{x})-\boldsymbol{g}(\boldsymbol{t},\boldsymbol{y})| \leqslant k|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}| \tag{20}$$

(参看 (19)). 又因为函数 $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{t},\boldsymbol{x})$ 连续, 所以存在充分小的正数 $r \leqslant q$, 有

$$|\boldsymbol{g}(\boldsymbol{t},\boldsymbol{x_0})-\boldsymbol{g}(\boldsymbol{t_0},\boldsymbol{x_0})| < (1-k)a, \quad \text{其中} |\boldsymbol{t}-\boldsymbol{t_0}| < r. \tag{21}$$

在 (20) 中令 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x_0}$, 由 (20) 和 (21) (当 $|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0| \leqslant a$, $|\boldsymbol{t}-\boldsymbol{t}_0| \leqslant r$) 可得

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{g}(\boldsymbol{t},\boldsymbol{x})-\boldsymbol{x_0}| &= |\boldsymbol{g}(\boldsymbol{t},\boldsymbol{x})-\boldsymbol{g}(\boldsymbol{t_0},\boldsymbol{x_0})| \\ &\leqslant |\boldsymbol{g}(\boldsymbol{t},\boldsymbol{x})-\boldsymbol{g}(\boldsymbol{t},\boldsymbol{x_0})| + |\boldsymbol{g}(\boldsymbol{t},\boldsymbol{x_0})-\boldsymbol{g}(\boldsymbol{t_0},\boldsymbol{x_0})| \\ &\leqslant k|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x_0}| + (1-k)a.\end{aligned}$$

所以, 当

$$|t-t_0| \leqslant r, \quad |x-x_0| \leqslant a \tag{22}$$

有

$$|g(t,x)-x_0| \leqslant a. \tag{23}$$

因为 $r \leqslant q$, 所以对集合 (22) 的任意两点 (t,x) 和 (t,y) 不等式 (20) 和 (23) 都满足. 把每一个定义在闭球 $|t-t_0| \leqslant r$ 上满足条件 $|\varphi(t)-x_0| \leqslant a$ 的连续函数 $\varphi(t)$ 的全体看作集合, 记为 Ω. 从不等式 (23) 可知算子 A 把集合 Ω 中的每个函数映射到集合自身, 而从不等式 (20) 可得, 算子 A 在集合 Ω 上是压缩的: 即对集合 Ω 上任意两个函数 φ, ψ, 有

$$\| A\psi - A\varphi \| \leqslant k \| \psi - \varphi \| .$$

由此可得, 在集合 Ω 上存在和唯一的函数 φ 它满足条件

$$\varphi = A\varphi \tag{24}$$

或者等价于 (5) 的等式

$$\varphi(t) = g(t, \varphi(t)). \tag{25}$$

现在需要证明如果点 (t,x) 属于集合 (22) 和满足方程 (4)(或者方程 (13)), 那么它就满足方程

$$x = \varphi(t). \tag{26}$$

事实上, 由 (20)

$$|x-\varphi(t)| = |g(t,x) - g(t,\varphi(t))| \leqslant k|x-\varphi(t)|,$$

因为 $k<1$, 该不等式成立仅当 $x=\varphi(t)$. 特别因为点 (t_0,x_0) 满足方程 (6) 所以它就满足方程 (7).

这样, 我们就构造了定义在开集 G 上方程 (4) 的解 $x=\varphi(t)$, 开集 G 由不等式 $|t-t_0|<r$ 所确定, 并且构造了含有点 (t_0,x_0) 的开集 U, 它是由不等式 $|t-t_0|<r$, $|x-x_0|<a$ 所确定的, 并在其上解唯一.

于是定理 27 得证.

定理 28 类似于定理 27, 假设行列式

$$\left|\frac{\partial f^i(t,x)}{\partial x^j}\right|$$

在开集 Γ 的每一点 (t,x) 非零, 此外偏导数

$$\frac{\partial f^i(t,x)}{\partial t^p}, \quad p=1,\cdots,k; \quad i=1,\cdots,n,$$

在集合 Γ 上有定义且连续. 那么方程 (4) 的任何解

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{t}) = (\varphi^1(\boldsymbol{t}), \cdots, \varphi^n(\boldsymbol{t}))$$

在它所定义的开集 G 上具有连续的偏导数

$$\frac{\partial \varphi^i(\boldsymbol{t})}{\partial t^p}, \quad p = 1, \cdots, k;\ i = 1, \cdots, n.$$

证明 假设 $\boldsymbol{t_0}$ 是开集 G 的任意一点, 在其上方程 (4) 的解有定义并且满足 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{t})$. 往下将证明在点 $\boldsymbol{x_0} = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{t_0})$ 的某个邻域偏导数 $\dfrac{\partial \varphi^i}{\partial t^p}$ 存在且连续.

假设 a 和 q 是两个正数; 当

$$|\boldsymbol{t} - \boldsymbol{t_0}| \leqslant q, \quad |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_0}| \leqslant a. \tag{27}$$

时点 $(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{x})$ 属于开集 Γ, 点 $\boldsymbol{t}$ 属于开集 G, 而函数 $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{t})$ 满足条件

$$|\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}) - \boldsymbol{x_0}| < a.$$

为了计算导数 $\dfrac{\partial \varphi^i}{\partial t^p}$ 记 $\boldsymbol{e}_p$ 为 k 维向量空间 T 中的单位向量, 它的方向沿着 p 轴, 令 $\boldsymbol{t_2} = \boldsymbol{t_1} + \tau \boldsymbol{e}_p$, 其中 $\boldsymbol{t_1}$ 是空间 T 的向量, 而 τ 是实数. 那么

$$\frac{\partial \varphi^i(\boldsymbol{t_1})}{\partial t^p} = \lim_{\tau \to 0} \frac{\varphi^i(\boldsymbol{t_2}) - \varphi^i(\boldsymbol{t_1})}{\tau}. \tag{28}$$

这样在计算偏导数 $\dfrac{\partial \varphi^i}{\partial t^p}$ 时, 应先给出函数

$$\psi^i(\boldsymbol{t_1}, \tau) = \frac{\varphi^i(\boldsymbol{t_2}) - \varphi^i(\boldsymbol{t_1})}{\tau}. \tag{29}$$

选取充分小的正数 r, 当 $|\boldsymbol{t_1} - \boldsymbol{t_2}| \leqslant r$, $|\tau| < r$ 时向量 $\boldsymbol{t_1}$ 和 $\boldsymbol{t_2}$ 满足条件

$$|\boldsymbol{t_1} - \boldsymbol{t_0}| < q, \quad |\boldsymbol{t_2} - \boldsymbol{t_0}| < q$$

集合 (27) 是凸的, 所以差

$$f^i(\boldsymbol{t_2}, \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{t_2})) - f^i(\boldsymbol{t_1}, \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{t_1}))$$

为零, 根据阿达马引理我们有

$$\begin{aligned} &f^i(\boldsymbol{t_2}, \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{t_2})) - f^i(\boldsymbol{t_1}, \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{t_1})) \\ &= \sum_{l=1}^{k} H_l^i(\boldsymbol{t_1}, \tau)(t_2^l - t_1^l) + \sum_{j=1}^{n} K_j^i(\boldsymbol{t_1}, \tau)(\varphi^j(\boldsymbol{t_2}) - \varphi^j(\boldsymbol{t_1})) = 0, \end{aligned} \tag{30}$$

其中 $H_l^i(\boldsymbol{t_1},\tau)$ 和 $K_j^i(\boldsymbol{t_1},\tau)$ 当 $|\boldsymbol{t}-\boldsymbol{t_0}|<r$, $|\tau|<r$ 时有定义且连续. 因为

$$K_j^i(\boldsymbol{t_0},\boldsymbol{0})=\frac{\partial}{\partial x^j}f^i(\boldsymbol{t_0},\boldsymbol{x_0}),$$

而行列式

$$\left|\frac{\partial f^i(\boldsymbol{t}_0,\boldsymbol{x}_0)}{\partial x^j}\right|$$

不为零, 所以对充分小的 r, $K_j^i(\boldsymbol{t_1},\tau)$ 形成的行列式不为零. 考虑到 $\tau\neq 0$ 方程 (30) 除以 τ 后有

$$\sum_{j=1}^n K_j^i(\boldsymbol{t_1},\tau)\psi^j(\boldsymbol{t_1},\tau)=-H_p^i(\boldsymbol{t_1},\tau). \tag{31}$$

因为方程组 (31) 的系数和右端函数给定, 并且系数行列式不为零, 所以这个关于函数 $\psi^j(\boldsymbol{t_1},\tau)$ 的方程组是可解的. 由此可得

$$\psi^j(\boldsymbol{t_1},\tau)=\chi^j(\boldsymbol{t_1},\tau), \tag{32}$$

其中当 $|\boldsymbol{t}-\boldsymbol{t_0}|<r$, $|\tau|<r$ 不排除 $\tau=0$ 时函数 $\chi^j(\boldsymbol{t_1},\tau)$ 有定义且连续. 在 (32) 中左端函数在 $\tau\neq 0$ 时处处有定义, 而右端函数对任意的 $|\tau|<r$ 都有定义且连续, 由此可得下面极限式

$$\lim_{\tau\to 0}\psi^j(\boldsymbol{t_1},\tau)=\chi^j(\boldsymbol{t_1},\tau). \tag{33}$$

这样从 (28), (29) 和 (33) 可知, 当 $|\boldsymbol{t}-\boldsymbol{t_0}|<r$ 时导数 $\dfrac{\partial\varphi^i(\boldsymbol{t_1})}{\partial t^p}$ 存在且连续.

于是定理 28 得证.

例题

1. 假设 R 是变量 $x^1,\cdots,x^n$ 空间而 $\boldsymbol{a}$ 是 R 中某个点,

$$u^j(\boldsymbol{x})=u^j(x^1,\cdots,x^n),\quad j=1,\cdots,n \tag{34}$$

是定义在点 $\boldsymbol{a}$ 某个邻域上的函数组. 假设这些函数和它们的偏导数 $\dfrac{\partial u^j(\boldsymbol{x})}{\partial x^i}$ 连续, 函数矩阵 $\left(\dfrac{\partial u^j(\boldsymbol{x})}{\partial x^i}\right)$ 的行列式在点 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}$ 不为零. 那么根据连续性, 在点 $\boldsymbol{a}$ 的某个邻域里行列式不为零. 利用函数 (34), 令

$$y^j=u^j(x^1,\cdots,x^n),\quad j=1,\cdots,n, \tag{35}$$

在点 $\boldsymbol{a}$ 的某个邻域中可以引进点的新坐标 $y^1,\cdots,y^n$ 来替换原坐标 $x^1,\cdots,x^n$, 或者写成向量形式:

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}). \tag{36}$$

事实上由定理 27, 数量方程组 (35) 或者向量方程 (36) 关于 $\boldsymbol{x}$ 是可解的. 所以可以得到向量解

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{y}), \tag{37}$$

它定义在点 $\boldsymbol{b}$ 的某邻域中且关于 $\boldsymbol{y}$ 满足恒等式

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{v}(\boldsymbol{y})) \tag{38}$$

和 $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}$. 根据定理 28 向量 $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{y})$ 的分量 $v^1(\boldsymbol{y}), \cdots, v^n(\boldsymbol{y})$ 关于变量 $y^1, \cdots, y^n$ 有连续偏导数.

连同 (38) 将证明关于变量 $\boldsymbol{x}$ 的恒等式

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})). \tag{39}$$

为此讨论关于未知变量 $\boldsymbol{z} = (z^1, \cdots, z^n)$ 的方程

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{z}). \tag{40}$$

显然该方程有解 $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x}$. 在恒等式 (38) 中用函数 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ 替换 $\boldsymbol{y}$, 可得关于 $\boldsymbol{x}$ 的恒等式

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{v}(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}))).$$

由此可知函数 $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}))$ 是方程 (40) 的解. 但是根据唯一性该解应该同原先得到的解 $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x}$ 一样, 所以就有 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}))$. 这样恒等式 (39) 成立.

从恒等式 (38) 和 (39) 可知变换 (36) 和 (37) 是互逆的, 并且在空间 R 中点 $\boldsymbol{a}$ 的某个邻域中从坐标 $x^1, \cdots, x^n$ 到坐标 $y^1, \cdots, y^n$ 互变.

2. 假设 R 是变量 $x^1, \cdots, x^n$ 空间, $\boldsymbol{a}$ 是该空间某个点并且

$$u^j(\boldsymbol{x}) = u^j(x^1, \cdots, x^n), \quad j = 1, \cdots, k, \tag{41}$$

是定义在点 $\boldsymbol{a}$ 的某邻域的函数组. 又假设函数 (41) 以及它的偏导数 $\dfrac{\partial u^j(\boldsymbol{x})}{\partial x^i}$ 连续.

在矩阵

$$\left(\frac{\partial u^j(\boldsymbol{x})}{\partial x^i}\right), \quad i = 1, \cdots, n, \quad j = 1, \cdots, k, \tag{42}$$

中上标 j 是行数, i 是列数, 这样矩阵 (42) 具有 k 行 n 列. 注意到第 j 行

$$\left(\frac{\partial u^j(\boldsymbol{x})}{\partial x^1}, \cdots, \frac{\partial u^j(\boldsymbol{x})}{\partial x^n}\right)$$

是函数 $u^j(\boldsymbol{x})$ 的梯度. 如果在点 $\boldsymbol{a}$ 该矩阵的秩为 k, 则根据连续性, 在点 $\boldsymbol{a}$ 的某个邻域该矩阵的秩也为 k. 这时函数 (41) 称为线性无关的. 如果在点 $\boldsymbol{a}$ 的某个邻域内矩阵 (42) 的秩小于 k, 那么函数 (41) 称为**线性相关**的.

如果 $k<n$ 并且函数组 (41) 线性无关, 那么可以添加若干个函数 $u^{k+1}(\boldsymbol{x}),\cdots,u^n(\boldsymbol{x})$ 得到线性无关函数组

$$u^1(\boldsymbol{x}),\cdots,u^k(\boldsymbol{x}),\cdots,u^n(\boldsymbol{x}). \tag{43}$$

事实上, 当 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}$ 时矩阵 (42) 是常值矩阵, 它的行向量线性无关. 可以对这个矩阵补充常数行使它成为非退化的方阵. 添加的行正是线性函数 $u^{k+1}(\boldsymbol{x}),\cdots,u^n(\boldsymbol{x})$ 的梯度.

往下将证明很重要的结论: **如果函数 (41) 线性无关, 而函数组**

$$u^1(\boldsymbol{x}),\cdots,u^k(\boldsymbol{x}),\omega(\boldsymbol{x}) \tag{44}$$

线性相关, 那么存在具有连续偏导数的函数 $W(y^1,\cdots,y^k)$, 它关于变量 $\boldsymbol{x}$ 满足恒等式

$$\omega(\boldsymbol{x})=W(u^1(\boldsymbol{x}),\cdots,u^k(\boldsymbol{x})). \tag{45}$$

换言之, 函数 $\omega(x)$ 可由函数 (41) 表出.

为了证明这个结论, 扩充线性无关组 (41) 至 (43), 并且根据例 1 的公式 (36) 引进新的坐标

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}).$$

假设 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{v}(\boldsymbol{y})$ 是它的逆映射 (参看 (37)). 记

$$W(\boldsymbol{y})=\omega(\boldsymbol{v}(\boldsymbol{y})). \tag{46}$$

事实上, 这样所定义的函数 $W(\boldsymbol{y})=W(y^1,\cdots,y^n)$ 只依赖于变量 $y^1,\cdots,y^k$(往下将证明这一点), 而且就是所求的函数 $W(y^1,\cdots,y^k)$. 事实上, 把 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ 代入 (46) 考虑到恒等式 (39) 可得

$$W(u^1(\boldsymbol{x}),\cdots,u^k(\boldsymbol{x}))=\omega(\boldsymbol{x}),$$

这就是要证明的 (45).

最后证明函数 (46) 不依赖于变量 $y^{k+1},\cdots,y^n$. 为此, 记 y^r 是这些变量中的一个, 只要证明

$$\frac{\partial W(\boldsymbol{y})}{\partial y^r}=0. \tag{47}$$

就够了.

已知

$$\frac{\partial W(\boldsymbol{y})}{\partial y^r}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\omega(\boldsymbol{x})}{\partial x^i}\cdot\frac{\partial v^i(\boldsymbol{y})}{\partial y^r}. \tag{48}$$

因为 (41) 线性无关, 而 (44) 线性相关, 所以函数 ω 的梯度可由函数 (41) 的梯度线性表示, 即

$$\frac{\partial \omega(\boldsymbol{x})}{\partial x^i} = a_1 \frac{\partial u^1(\boldsymbol{x})}{\partial x^i} + \cdots + a_k \frac{\partial u^k(\boldsymbol{x})}{\partial x^i}, \quad i = 1, \cdots, n, \tag{49}$$

其中 $a_1, \cdots, a_k$ 是某些依赖于 $\boldsymbol{x}$ 的函数. 在 (49) 两边同时乘以 $\dfrac{\partial v^i(\boldsymbol{y})}{\partial y^r}$ 并关于指数 i 求和可得

$$\frac{\partial W(\boldsymbol{y})}{\partial y^r} = a_1 \sum_{i=1}^n \frac{\partial u^1(\boldsymbol{x})}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial v^i(\boldsymbol{y})}{\partial y^r} + \cdots + a_k \sum_{i=1}^n \frac{\partial u^k(\boldsymbol{x})}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial v^i(\boldsymbol{y})}{\partial y^r}. \tag{50}$$

显然

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial u^s(\boldsymbol{x})}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial v^i(\boldsymbol{y})}{\partial y^r} = \frac{\partial y^s}{\partial y^r} = 0, \quad s = 1, \cdots, k$$

(因为 $r > k$). 这样, (50) 的右端为零, 从而 (47) 得证.

附录 II　线性代数

在这个附录中讲述了本书最基本章节里所用到的线性代数结果. 应当指出, § 36 只依赖于 § 34 的结论, 完全没有用到 § 35 的结果.

§34. 最小零化多项式

特征值与特征向量

(A)　每一个其元素为实数或复数的 n 阶方阵

$$A = (a_j^i), \quad i, j = 1, 2, \cdots, n$$

都对应着 n 维向量坐标空间 R 的一个线性变换 $\boldsymbol{A}$, 亦即: 它使得空间 R 的向量

$$\boldsymbol{x} = (x^1, \cdots, x^n)$$

用关系式

$$y^i = \sum_j a_j^i x^j$$

确定了与向量

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} = (y^1, \cdots, y^n)$$

的对应. 这时零矩阵 0 (它的所有元素等于零) 所对应的变换是零变换 $\boldsymbol{0}$, 它把每一个向量变为零向量. 单位矩阵

$$E = (\delta_j^i), \quad \left(\delta_j^i = \begin{cases} 0, & \text{当}\, i \neq j\, \text{时}, \\ 1, & \text{当}\, i = j\, \text{时} \end{cases} \right)$$

对应的变换是空间 R 的单位变换或恒等变换 $\boldsymbol{E}$:

$$\boldsymbol{E}x = x\,.$$

如果在空间 R 中引进新的坐标 $x'^1, \cdots, x'^n$, 它们与原来坐标 $x^1, \cdots, x^n$ 的联系是

$$x'^j = \sum_i s_i^j x^i\,,$$

或者写成矩阵的形式:

$$\boldsymbol{x}' = S\boldsymbol{x}\,,$$

那么变换 $\boldsymbol{A}$ 在新坐标下就对应于矩阵

$$A' = SAS^{-1}. \tag{1}$$

我们来证明关系式 (1). 事实上,

$$\boldsymbol{y}' = S\boldsymbol{y} = SA\boldsymbol{x} = SAS^{-1}\boldsymbol{x}'\,.$$

(B)　令 $\boldsymbol{A}$ 是一般线性变换, 而 A 是在某一坐标系下变换 $\boldsymbol{A}$ 所对应的矩阵. 如果有不为零的向量 $\boldsymbol{h}$ 以及某一数 λ 满足关系式

$$A\boldsymbol{h} = \lambda\boldsymbol{h}\,, \tag{2}$$

那么就称向量 $\boldsymbol{h}$ 为变换 $\boldsymbol{A}$ 的**特征向量**, 而称数 λ 为这个变换对应于向量 $\boldsymbol{h}$ 的**特征值**. 矩阵 $(a_j^i - z\delta_j^i)$ 的行列式:

$$D(z) = |a_j^i - z\delta_j^i| = |A - zE|$$

称为矩阵 A 的**特征多项式**. 可以证明, 多项式 $D(z)$ 的系数与坐标系的选取无关, 而完全由变换 $\boldsymbol{A}$ 所确定. 所以多项式 $D(z)$ 也称为变换 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式. 此外, 数 λ 当且仅当为多项式 $D(z)$ 的根时, 它才是变换 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

我们来证明多项式 $D(z)$ 与坐标系选择的无关性. 在新坐标系下, 变换 $\boldsymbol{A}$ 所对应的矩阵是 SAS^{-1}, 其中 S 是某个非退化矩阵 (见 (1)). 于是我们有:

$$|SAS^{-1} - zE| = |SAS^{-1} - zSES^{-1}| = |S(A - zE)S^{-1}|$$

$$= |S|\cdot|A - zE|\cdot|S^{-1}| = |S|\cdot|A - zE|\cdot|S|^{-1} = |A - zE|\,.$$

我们现在把与关系式 (2) 等价的关系式 $(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{E})\boldsymbol{h} = \boldsymbol{0}$ 写成坐标形式:

$$\sum_{j=1}^n (a_j^i - \lambda\delta_j^i)h^j = 0, \quad i = 1, \cdots, n\,.$$

这个齐次方程组有非零解 $h^1, \cdots, h^n$ 当且仅当它的行列式 $D(\lambda)$ 等于零. 于是, 多项式 $D(z)$ 的每一个根 λ 都是变换 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, 并且其逆也成立.

(C) 如果变换 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ 两两不同, 那么它们所对应的特征向量 $\boldsymbol{h}_1, \cdots, \boldsymbol{h}_k$ 是线性无关的.

我们对于数 k 来进行归纳法证明. 当 $k=1$ 时, 这个结论是显然的. 假设它对 $k-1$ 个向量正确, 现在来证明它对 k 个向量也正确. 事实上, 如果 $a_1\boldsymbol{h}_1 + \cdots + a_k\boldsymbol{h}_k = 0$, 将变换 $\boldsymbol{A}$ 应用到这个关系式, 我们得到:

$$a_1\lambda_1\boldsymbol{h}_1 + \cdots + a_k\lambda_k\boldsymbol{h}_k = 0;$$

从另一方面有

$$\lambda_k(a_1\boldsymbol{h}_1 + \cdots + a_k\boldsymbol{h}_k) = 0.$$

两式相减得到:

$$a_1(\lambda_1 - \lambda_k)\boldsymbol{h}_1 + \cdots + a_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k)\boldsymbol{h}_{k-1} = 0.$$

按照归纳法假设, 由此得到出, $a_1 = \cdots = a_{k-1} = 0$, 所以 $a_k\boldsymbol{h}_k = 0$, 从而 $a_k = 0$.

于是, 如果特征多项式 $D(z)$ 所有的根都是互不相同的, 那么我们可以取变换 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量 $\boldsymbol{h}_1, \cdots, \boldsymbol{h}_n$ 作为空间 R 的基. 在这个基之下, 变换 $\boldsymbol{A}$ 所对应的是对角矩阵. 在一般情况下, 把变换矩阵化成对角型是不可能的, 因此产生建立比较复杂理论的必要性, 现在就转到这方面的陈述.

最小零化多项式

(D) n 阶方阵可以按已知的规则彼此相加、相乘, 也可以与数相乘; 矩阵的这些运算对应于变换的同样运算. 因此, 如果

$$f(z) = a_0z^m + a_1z^{m-1} + \cdots + a_m$$

是关于变量 z 的实系数或复系数的多项式, 那么在这个多项式中把 z 换成矩阵 A, 我们就得到矩阵

$$f(A) = a_0A^m + a_1A^{m-1} + \cdots + a_mE,$$

它是矩阵 A 的多项式. 可以类似地定义变换 $\boldsymbol{A}$ 的多项式 $f(\boldsymbol{A})$. 如果 $f(z) \neq 0$, 而矩阵 $f(A)$ 是零 (在这种情况下, 变换 $f(\boldsymbol{A})$ 显然也是零变换), 则称多项式 $f(z)$ 为矩阵 A 和变换 $\boldsymbol{A}$的零化多项式. 可以证明, 矩阵 A 的特征多项式 $D(z)$ 是矩阵 A 的零化多项式:

$$D(A) = 0.$$

为了证明这个结果, 我们考虑以

$$\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n$$

为基的 n 维向量空间 R, 以及考察对应于这个基的坐标系, 亦即

$$\boldsymbol{e}_j = (0, \cdots, 1, \cdots, 0),$$

其中坐标 1 位于第 j 个位置. 我们用 $\boldsymbol{A}$ 表示在所选取的基之下对应于矩阵 A 的变换. 于是我们有:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_j = \sum_s a_j^s \boldsymbol{e}_s,$$

或者同样地,

$$\sum_s (a_j^s \boldsymbol{E} - \delta_j^s \boldsymbol{A})\boldsymbol{e}_s = \boldsymbol{0}. \tag{3}$$

令

$$L_j^s(z) = a_j^s - \delta_j^s z,$$

这里 $L_j^s(z)$ 是 z 的零次或者一次多项式, 而

$$(L_j^s(z))$$

是由多项式组成的矩阵. 在这个矩阵中, 其元素 $L_j^s(z)$ 的代数余子式记为 $M_j^s(z)$, 于是有关系式

$$\sum M_i^j(z) L_j^s(z) = \delta_i^s D(z) \tag{4}$$

成立. 现在用多项式 $M_i^j(\boldsymbol{A})$ 左乘关系式 (3), 然后按 j 对所得到的关系式求和, 根据 (4) 式即得:

$$\sum_{s,j} M_i^j(\boldsymbol{A})(a_j^s \boldsymbol{E} - \delta_j^s \boldsymbol{A})\boldsymbol{e}_s = \sum_{s,j} M_i^j(\boldsymbol{A}) L_j^s(\boldsymbol{A})\boldsymbol{e}_s$$
$$= \sum_s \delta_j^s D(\boldsymbol{A})\boldsymbol{e}_s = \boldsymbol{0}.$$

因此, 变换 $D(\boldsymbol{A})$ 把空间 R 所有的基向量都变成零, 从而是一个零变换, 而这就意味着, 与变换 $D(\boldsymbol{A})$ 相对应的矩阵 $D(A)$ 也是零矩阵:

$$D(A) = 0.$$

(E)　在矩阵 A (或变换 $\boldsymbol{A}$) 的所有零化多项式集合中, 在准确到数值因子之下, 有唯一的一个幂次最低的多项式 $\Delta(z)$; 这个多项式 $\Delta(z)$ 是矩阵 A 的所有其他零化多项式的因子; 它称为零化矩阵 A 的**最小多项式**. 今后总假设多项式 $\Delta(z)$ 的最高幂次项的系数等于一. 在矩阵 A 是实的情况下, 多项式 $\Delta(z)$ 也是实的.

为了证明命题 (E), 我们注意到, 如果 $f(z)$ 和 $g(z)$ 是两个任意多项式, 而 $d(z)$ 是它们的最大公因子, 那么有恒等式

$$d(z) = p(z)f(z) + q(z)g(z) \tag{5}$$

成立, 其中 $p(z)$ 和 $g(z)$ 是用适当的方法选取的多项式. 利用多项式的剩余除法可以证明恒等式 (5) 的存在性. 由关系 (5) 推出, 如果 $f(z)$ 和 $g(z)$ 都是 A 的零化多项式, 那么它们的最大公因子 $d(z)$ 也是矩阵 A 的零化多项式. 从命题 (D) 得出, 矩阵 A 的零化多项式是存在的. 现在设 $\Delta(z)$ 是矩阵 A 幂次最低的零化多项式, 而 $f(z)$ 也是矩阵 A 的任意一个零化多项式. 如果多项式 $\Delta(z)$ 不能整除多项式 $f(z)$, 那么 $f(z)$ 和 $\Delta(z)$ 最大公因子的幂次数就要比多项式 $\Delta(z)$ 的幂次数低, 并且它也是矩阵 A 的化零多项式, 但根据假设这是不可能的.

现在假设矩阵 A 是实的, 于是有

$$0 = \overline{\Delta(A)} = \overline{\Delta}(\overline{A}) = \overline{\Delta}(A).$$

因此多项式 $\overline{\Delta}(z)$ 也是矩阵 A 的零化多项式, 从而 $\Delta(z)$ 整除 $\overline{\Delta}(z)$, 而这只有当 $\Delta(z) = \overline{\Delta}(z)$ 时才有可能. 于是命题 (E) 得证.

(F) 令 $\Delta(z)$ 是矩阵 A 的最小零化多项式, 于是数 λ 是矩阵 A 的特征值当且仅当它是多项式 $\Delta(z)$ 的根.

为了证明这个命题, 我们用 $\boldsymbol{A}$ 表示在 n 维向量坐标空间中矩阵 A 所对应的变换. 注意到如果 $f(z)$ 是任意的多项式, 那么

$$\text{从} \quad \boldsymbol{Ah} = \lambda\boldsymbol{h} \quad \text{推得} \quad f(\boldsymbol{A})\boldsymbol{h} = f(\lambda)\boldsymbol{h}. \tag{6}$$

事实上, 我们有

$$\boldsymbol{Eh} = \boldsymbol{h}, \quad \boldsymbol{Ah} = \lambda\boldsymbol{h}, \quad \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{h} = A\lambda\boldsymbol{h} = \lambda^2\boldsymbol{h}, \quad \cdots, \quad \boldsymbol{A}^m\boldsymbol{h} = \lambda^m\boldsymbol{h}.$$

将多项式 $f(z)$ 的系数乘以这些关系式, 然后再相加起来就得到关系式 (6).

假设 λ 是矩阵 A 的特征值; 于是存在这样的向量 $\boldsymbol{h} \neq 0$, 使得 $\boldsymbol{Ah} = \lambda\boldsymbol{h}$, 以及由 (6) 得出 $\Delta(\boldsymbol{A})\boldsymbol{h} = \Delta(\lambda)\boldsymbol{h}$; 但是由于 $\Delta(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{0}$, 所以 $\Delta(\lambda) = 0$. 反之, 令 λ 为多项式 $\Delta(z)$ 的根, 于是 $\Delta(z) = (z-\lambda)\Gamma(z)$. 因为 $\Delta(z)$ 是矩阵 A 的最小零化多项式, 所以 $\Gamma(z)$ 不是它的零化多项式, 因此 $\Gamma(A)$, 从而变换 $\boldsymbol{\Gamma}(z)$, 都不为零. 于是, 存在向量 $\boldsymbol{x}$, 使得 $\Gamma(\boldsymbol{A})x = \boldsymbol{h}' \neq 0$, 从而我们有 $\boldsymbol{0} = \Delta(\boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = (A-\lambda\boldsymbol{E})\Gamma(A)\boldsymbol{x} = (A-\lambda\boldsymbol{E})\boldsymbol{h}'$, 亦即 $\boldsymbol{Ah}' = \lambda\boldsymbol{h}'$, 所以 λ 是矩阵 A 的特征值.

于是命题 (F) 得证.

根据需要, 当向量只取实的坐标时, 可以把坐标向量空间 R 看成是实的, 或者当向量取复的坐标时, 就把 R 看成为复空间. 如果 $\boldsymbol{x} = (x^1, \cdots, x^n)$ 是复空间 R 的向量, 那么 $\overline{\boldsymbol{x}} = (\overline{x}^1, \cdots, \overline{x}^n)$ 就是 $\boldsymbol{x}$ 的复共轭向量; 如果 S 是复空间 R 的子空间, 那么由一切与 S 的向量复共轭的向量所组成的子空间 $\overline{S}$ 就认为是与子空间 S 复共轭的空间.

设 S_1 和 S_2 是空间 R 的子空间, 如果 R 中的每一向量 $\boldsymbol{x}$ 都可以用唯一的方法写成和的形式:

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2,$$

其中向量 $\boldsymbol{x}_i$ 属于子空间 $S_i, i=1,2$, 那么就认为复 (或者实) 的空间 R 分解成子空间 S_1 与 S_2 的直和.

(G) 设矩阵 A 的最小零化多项式 $\Delta(z)$ 分解为两个互质的多项式: $\Delta(z)=\Delta_1(z)\Delta_2(z)$. 用 $S_i, i=1,2$ 表示由 R 中所有满足条件 $\Delta_i(\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=0$ 的向量 $\boldsymbol{x}$ 组成的线性子空间, 这里 $\boldsymbol{A}$ 是矩阵 A 的变换. 可以证明, 空间 R 能被分解为子空间 S_1 和 S_2 的直和. (如果矩阵 A 是复的, 那么这结论中的空间 R 应当认为也是复的.) 现在假设矩阵 A 是实的, 于是应当注意两种重要情况: (a) 因子 $\Delta_1(z)$ 和 $\Delta_2(z)$ 是实的, 这时空间 R 以及它的子空间 S_1 和 S_2 可以认为是实的; (b) 因子 $\Delta_1(z)$ 和 $\Delta_2(z)$ 是相互共轭的, 这时应假定空间 R 是复的, 而它的子空间 S_1 和 S_2 是复共轭的.

我们来证明命题 (G). 由于因子 $\Delta_1(z)$ 和 $\Delta_2(z)$ 是互质的, 所以可适当选取多项式 $p_1(z)$ 和 $p_2(z)$, 使得成立恒等式 (见 (5)):

$$1=p_1(z)\Delta_1(z)+p_2(z)\Delta_2(z). \tag{7}$$

注意到, 如果 $\Delta_1(z)$ 和 $\Delta_2(z)$ 是实的, 那么多项式 $p_1(z)$ 和 $p_2(z)$ 可取为实的, 这是因为它们是由多项式 $\Delta_1(z)$ 和 $\Delta_2(z)$ 用剩余除法得到的. 现设 $\boldsymbol{x}$ 是空间 R 的任意向量, 根据 (7) 有

$$\boldsymbol{x}=p_1(\boldsymbol{A})\Delta_1(\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}+p_2(\boldsymbol{A})\Delta_2(\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}.$$

设

$$\boldsymbol{x}_1=p_2(\boldsymbol{A})\Delta_2(\boldsymbol{A})\boldsymbol{x},\quad \boldsymbol{x}_2=p_1(\boldsymbol{A})\Delta_1(\boldsymbol{A})\boldsymbol{x},$$

我们得到分解式 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2$, 并且

$$\Delta_1(\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}_1=\Delta_1(\boldsymbol{A})p_2(\boldsymbol{A})\Delta_2(\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=p_2(\boldsymbol{A})\Delta(\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=0,$$

$$\Delta_2(\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}_2=\Delta_2(\boldsymbol{A})p_1(\boldsymbol{A})\Delta_1(\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=p_1(\boldsymbol{A})\Delta(\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=0,$$

于是向量 $\boldsymbol{x}_i$ 属于子空间 S_i. 如果 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_1'+\boldsymbol{x}_2'$ 是向量任意的和式分解, 其中 $\boldsymbol{x}_i'$ 属于 $S_i, i=1,2$, 那么根据 (7) 有

$$\boldsymbol{x}_1'=p_1(\boldsymbol{A})\Delta_1(\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}_1'+p_2(\boldsymbol{A})\Delta_2(\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}_1'=p_2(\boldsymbol{A})\Delta_2(\boldsymbol{A})(\boldsymbol{x}_1'+\boldsymbol{x}_2')=\boldsymbol{x}_1;$$

同样有 $\boldsymbol{x}_2'=\boldsymbol{x}_2$, 这就证明了分解的唯一性.

如果矩阵 A 是实的, 因子 $\Delta_1(z)$ 和 $\Delta_2(z)$ 也是实的, 那么从实向量 x 出发, 我们得到实向量 $\boldsymbol{x}_1$ 和 $\boldsymbol{x}_2$. 如果矩阵 A 是实的, 而因子 $\Delta_1(z)$ 和 $\Delta_2(z)$ 是复共轭的, 那么根据向量子空间 S_1 和 S_2 的定义, 它们是复共轭的.

于是命题 (G) 得证.

(H) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 维空间 R 的线性变换,

$$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r$$

是这个变换所有特征值的集合,

$$\Delta(z)=(z-\lambda_1)^{k_1}(z-\lambda_2)^{k_2}\cdots(z-\lambda_r)^{k_r}$$

是变换 $\boldsymbol{A}$ 的最小零化多项式,

$$D(z)=(-1)^n(z-\lambda_1)^{q_1}(z-\lambda_2)^{q_2}\cdots(z-\lambda_r)^{q_r} \tag{8}$$

是变换 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式. 因为多项式 $\Delta(z)$ 整除多项式 $D(z)$, 所以

$$q_i \geqslant k_i, \quad i=1,\cdots,r.$$

根据命题 (G), 空间 R 分解为子空间 $S_1,S_2,\cdots,S_r$ 的直和, 这里 S_i 是由满足条件

$$(\boldsymbol{A}-\lambda_i\boldsymbol{E})^{k_i}\boldsymbol{x}=0$$

的所有向量 x 组成的. 可以证明, 空间 S_i 的维数等于 q_i. 数 q_i 称为特征值 λ_i 的重数.

我们来证明空间 S_i 的维数等于 q_i. 空间 S_i 关于变换 $\boldsymbol{A}$ **是不变的**, 即 $\boldsymbol{A}S_i$ 含在 S_i 中. 这样, 如果在空间 S_i 中选取某一基, 那么当把变换 $\boldsymbol{A}$ 考虑为 S_i 上的变换时, 它所对应的矩阵 A_i 是 p_i 阶的, 其中 p_i 是子空间 S_i 的维数. 如果空间 R 的基是由所有子空间 S_i 的基组成的, 那么在所得到的基之下, 变换 $\boldsymbol{A}$ 对应的矩阵 A 是由矩阵 $A_1,\cdots,A_r$ 组成的, A_i 位在 A 的对角线上. 由此看出, 空间 R 的变换 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式等于乘积

$$D_1(z)D_2(z)\cdots D_r(z),$$

其中 $D_i(z)$ 是把变换 $\boldsymbol{A}$ 看为子空间 S_i 上的变换时的特征多项式. 因为 $\Delta_i(z)=(z-\lambda_i)^{k_i}$ 是子空间 S_i 上的变换 $\boldsymbol{A}$ 的零化多项式, 所以 S_i 上的变换 $\boldsymbol{A}$ 仅有一个特征值 λ_i, 又因为特征多项式 $D_i(z)$ 的次数等于矩阵的阶数, 即子空间 S_i 的维数 p_i, 所以 $D_i(z)$ 具有形式 $(-1)^{p_i}(z-\lambda_i)^{p_i}$. 因此 $D(z)=(-1)^n(z-\lambda_1)^{p_1}(z-\lambda_2)^{p_2}\cdots(z-\lambda_r)^{p_r}$, 从而 $p_i=q_i$ (见 (8)).

这样就证明了命题 (H).

§35. 矩阵函数

在这一节中我们对变换 $\boldsymbol{A}$ 及其所对应的矩阵 A 不加区别, 这是因为坐标系并不改变. 同时, 在这一节中将用到复变函数论的某些知识 (例如可参考 И. И. 普里瓦洛夫著《复变函数引论》—— 中译本, 人民教育出版社, 1978. —— 译者注).

矩阵的幂级数

(A) 设

$$\begin{aligned}&\Delta(z)=(z-\lambda_1)^{k_1}(z-\lambda_2)^{k_2}\cdots(z-\lambda_r)^{k_r},\\&k_i>0, i=1,\cdots,r,\quad k_1+k_2+\cdots+k_r=k\end{aligned} \tag{1}$$

是矩阵 A 的最小零化多项式, 数

$$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r \tag{2}$$

是它的两两不同的根. 根据 § 34 的命题 (F), (2) 是矩阵 A 的所有特征值的集合. 如果相应于矩阵 A 的每一特征值 λ_i, 给出了数列

$$W^{(0)}(\lambda_i), W^{(1)}(\lambda_i), \cdots, W^{(k_i-1)}(\lambda_i), \quad i = 1, \cdots, r \tag{3}$$

那么说**在矩阵 A 的谱上给定了函数** W. 如果 $W(z)$ 是复变量 z 的某一函数, 它在点 λ_i 处是正则的, 以数 (3) 作为它在点 λ_i 处的函数值以及到 $k_i - 1$ 阶的导数值, 那么我们得到一个在矩阵 A 的谱上给定的函数. 如果对于复变量 z 的两个函数, 数值 (3) 相应地重合, 那么说这两个函数在矩阵 A 的谱上是一致的. 可以证明, 两个多项式 $f(z)$ 和 $g(z)$, 当且仅当 $f(A) = g(A)$ 时, 在矩阵 A 的谱上是一致的. 还可以证明, 对应任意给定的数 (3), 常存在和唯一的次数 $\leqslant k-1$ 的多项式 $\varphi(z)$, 使得它在矩阵 A 的谱上与数 (3) 是一致的, 即

$$\varphi^{(j)}(\lambda_i) = W^{(j)}(\lambda_i), \quad j = 0, 1, \cdots, k_i - 1; i = 1, \cdots, r. \tag{4}$$

这时, 多项式 $\varphi(z)$ 的系数是量 (3) 的线性函数, 因此连续地依赖于 (3).

我们来证明这个命题. 置 $h(z) = f(z) - g(z)$. 如果 $f(A) = g(A)$, 那么 $h(A) = 0$. 其次, 如果多项式 $f(A), g(A)$ 在矩阵 A 的谱上是一致的, 那么函数 $h(z)$ 在矩阵 A 的谱上变为零. 这样, 为了证明命题 (A) 中关于多项式 $f(z)$ 和 $g(z)$ 的部分, 只要证明, 当且仅当 $h(z)$ 在矩阵 A 的谱上是零时, 多项式 $h(z)$ 是矩阵 A 零化多项式就够了. 现在来证明它. 设多项式 $h(z)$ 是 A 的零化多项式, 根据 § 34 的命题 (E), 多项式 $\Delta(z)$ 整除 $h(z)$, 所以 $h(z)$ 以数 λ_i 为根, 且其重数不小于 k_i (见 (1)), 从此推知它在矩阵 A 的谱上是零. 如果多项式 $h(z)$ 在矩阵 A 的谱上是零, 那么它以数 λ_i 为根, 且其重数不小于 k_i, 因而多项式 $\Delta(z)$ 整除 $h(z)$ (见 (1)), 从此推知 $h(A) = 0$.

现在证明命题 (A) 中关于多项式 $\varphi(z)$ 的部分. 关系式 (4) 的集合可以看作多项式 $\varphi(z)$ 的系数的线性方程组, 这个方程组有 k 个方程和 k 个未知数. 为了证明命题 (A), 只要确定这个方程组的行列式不为零, 为此只要证明, 当这个方程组的右端变为零时, 只有零多项式 $\varphi(z)$ 满足 (4) 就行了. 当方程 (4) 的右端变为零时, 多项式 $\varphi(z)$ 在矩阵 A 的谱上变为零, 而根据前面的证明, 多项式 $\Delta(z)$ 整除它, 但它的次数不高于 $k-1$, 所以它恒等于零.

于是命题 (A) 得证.

(B) 设 A 是实矩阵, 这时它的最小零化多项式 $\Delta(z)$ 是实的 (见 § 34 的命题 (E)), 所以如果 λ_i 是它的复根, 那么它有同样重数的复共轭根 $\overline{\lambda}_i$. 可以证明, 如果数组 (3) 满足条件:

$$W^{(j)}(\overline{\lambda}_i) = \overline{W^{(j)}(\lambda_i)}, \quad j = 0, \cdots, k_i - 1; i = 1, \cdots, r, \tag{5}$$

那么由关系式 (4) 确定的多项式 $\varphi(z)$ 是实的, 于是矩阵 $\varphi(A)$ 也是实的.

为了证明命题 (B), 以 $\varphi^1, \cdots, \varphi^k$ 记多项式 $\varphi(z)$ 的系数. 对于未知数 $\varphi^1, \cdots, \varphi^k$ 的方程组 (4), 如果不去考察它的细节, 总可以写成形式:

$$\sum_{\beta=1}^{k} c_\beta^\alpha \varphi^\beta = d^\alpha, \quad \alpha = 1, \cdots, k. \tag{6}$$

根据条件 (5), 这个方程组具有下面性质: 组中在有每一个方程的同时还有它的复共轭方程, 就是方程

$$\sum_{\beta=1}^{k} \overline{c_\beta^\alpha} \varphi^\beta = \overline{d^\alpha}.$$

把等式 (6) 取共轭得到等式

$$\sum_{\beta=1}^{k} \overline{c_\beta^\alpha}\, \overline{\varphi^\beta} = \overline{d^\alpha}. \tag{7}$$

关系式 (7) 的集合是关于未知数 $\overline{\varphi^1}, \cdots, \overline{\varphi^k}$ 的线性方程组. 可是由于所叙述的性质, 方程 (6) 和 (7) 是一致的, 如有不同, 只能在方程排列的顺序上. 因为方程组 (6) 的行列式不等于零, 所以它的两个解 $\varphi^1, \cdots, \varphi^k$ 和 $\overline{\varphi^1}, \cdots, \overline{\varphi^k}$ 是一致的: $\varphi^\alpha = \overline{\varphi^\alpha}, \alpha = 1, \cdots, k$, 这就表示数 $\varphi^1, \cdots, \varphi^k$ 是实数. 于是证明了命题 (B).

设复变量 z 的解析函数是由收敛半径为 ρ 的级数

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_m z^m + \cdots \tag{8}$$

定义的, 于是, 级数 (8) 当 $|z| < \rho$ 时是收敛的, 当 $|z| > \rho$ 时是发散的.

要记住, 由 (8) 逐项求导得到的级数

$$f'(z) = a_1 + 2a_2 z + \cdots + m a_m z^{m-1} + \cdots$$

与级数 (8) 有同样的收敛半径, 并且在收敛圆的内部是收敛于函数 $f(z)$ 的导数 $f'(z)$ 的.

以矩阵 A 代替级数 (8) 中的 z 时, 我们得到收敛的矩阵级数

$$f(A) = a_0 E + a_1 A + \cdots + a_m A^m + \cdots \tag{9}$$

(如果位在第 i 行第 j 列的元素组成的数项级数对任意 $i, j = 1, \cdots, n$ 是收敛的, 那么称矩阵级数是收敛的.) 这时我们说函数 $f(z)$ 在矩阵 A 上有定义.

定理 29 仍用命题 (A) 的记号. 如果矩阵 A 的所有特征值位在级数 (8) 的收敛圆中, 即

$$|\lambda_i| < \rho, \quad i = 1, \cdots, r,$$

那么矩阵级数 (9) 是收敛的, 于是矩阵 $f(A)$ 有定义. 数

$$f(\lambda_i), \quad i=1,\cdots,r, \tag{10}$$

(其中可能有几个是一样的) 组成矩阵 $f(A)$ 的所有特征值的集合. 并且, 如果矩阵 A 的特征值 λ_i 也位在定义某个函数 $g(z)$ 的级数的收敛圆内部, 于是 $g(A)$ 有定义, 那么矩阵 $f(A)$ 和 $g(A)$ 一致的必要和充分条件是: 函数 $f(z)$ 和 $g(z)$ 在矩阵 A 的谱上是一致的.

证明 作级数 (8) 的部分和

$$f_m(z)=a_0+a_1z+\cdots+a_mz^m,$$

当 $|z|<\rho$ 时, 有

$$f^{(j)}(z)=\lim_{m\to\infty}f_m^{(j)}(z).$$

其次, 设 $\varphi_m(z)$ 是次数 $\leqslant k-1$ 的多项式, 它在 A 的谱上与多项式 $f_m(z)$ 是一致的 (参看 (A)). 因为矩阵 A 的特征值 (2) 满足条件 $|\lambda_i|<\rho, i=1,\cdots,r$, 所以我们有

$$\lim_{m\to\infty}\varphi_m^{(j)}(\lambda_i)=f^{(j)}(\lambda_i), \quad j=0,\cdots,k_i-1; i=1,\cdots,r.$$

从此由命题 (A) 推知, 多项式序列 $\varphi_m(z)$ 按系数收敛于某一次数 $\leqslant k-1$ 的多项式 $\varphi(z)$, 并且多项式 $\varphi(z)$ 和函数 $f(z)$ 在矩阵 A 的谱上是一致的, 所以

$$f_m(A)=\varphi_m(A);$$

当 $m\to\infty$ 时, 右端趋于 $\varphi(A)$, 这就表明左端当 $m\to\infty$ 时是收敛的. 于是级数 (9) 收敛于矩阵 $f(A)=\varphi(A)$.

现在证明多项式

$$\Gamma(z)=[z-f(\lambda_1)]^{k_1}[z-f(\lambda_2)]^{k_2}\cdots[z-f(\lambda_r)]^{k_r}$$

是矩阵 $f(A)$ 的零化多项式. 为此, 考虑多项式

$$\Phi_m(z)=[\varphi_m(z)-\varphi_m(\lambda_1)]^{k_1}[\varphi_m(z)-\varphi_m(\lambda_2)]^{k_2}\cdots[\varphi_m(z)-\varphi_m(\lambda_r)]^{k_r}, \tag{11}$$

我们来证明它是矩阵 A 的零化多项式. 多项式 $\varphi_m(z)-\varphi_m(\lambda_i)$ 在 $z=\lambda_i$ 处变为零, 所以它可以用二项式 $z-\lambda_i$ 整除, 于是多项式 (11) 可以写成形式:

$$\Phi_m(z)=\Psi_m(z)\Delta(z),$$

所以多项式 $\Phi_m(z)$ 是 A 的零化多项式, 即

$$[\varphi_m(A)-\varphi_m(\lambda_1)E]^{k_1}[\varphi_m(A)-\varphi_m(\lambda_2)E]^{k_2}\cdots[\varphi_m(A)-\varphi_m(\lambda_r)E]^{k_r}=0.$$

在这关系式中令 $m \to \infty$, 得到

$$[f(A)-f(\lambda_1)E]^{k_1}[f(A)-f(\lambda_2)E]^{k_2}\cdots[f(A)-f(\lambda_r)E]^{k_r}=0,$$

这就是说多项式 $\Gamma(z)$ 是矩阵 $f(A)$ 的零化多项式.

由所证, 特别可以推知, 矩阵 $f(A)$ 的所有特征值包含在数 (10) 中 (参看 §34, (F)). 现在证明 (10) 中的每一个数是矩阵 $f(A)$ 的特征值. 设 $\boldsymbol{h}_i$ 是矩阵 A 对应于特征值 λ_i 的特征向量, 于是

$$A\boldsymbol{h}_i=\lambda_i\boldsymbol{h}_i,$$

根据 §34 的公式 (6) 得到

$$f_m(A)\boldsymbol{h}_i=f_m(\lambda_i)\boldsymbol{h}_i.$$

当 $m \to \infty$ 时, 得到

$$f(A)\boldsymbol{h}_i=f(\lambda_i)h_i$$

于是, 数 $f(\lambda_i)$ 是矩阵 $f(A)$ 的特征值.

现在假设函数 $g(z)$ 的收敛圆也含有矩阵 A 的所有特征值. 根据已经证明的, 矩阵 $g(A)$ 有定义, 并且存在次数 $\leqslant k-1$ 的多项式 $\psi(z)$, 它在矩阵 A 的谱上与函数 $g(z)$ 是一致的, 同时 $\psi(A)=g(A)$. 现在如果 $f(A)=g(A)$, 那么 $\varphi(A)=\psi(A)$, 根据命题 (A), 多项式 $\varphi(z)$ 和 $\psi(z)$ 在矩阵 A 的谱上是一致的. 反之, 如果函数 $f(z)$ 和 $g(z)$ 在矩阵 A 的谱上是一致的, 那么多项式 $\varphi(z)$ 和 $\psi(z)$ 在矩阵 A 的谱上是一致的, 于是根据命题 (A), $\varphi(A)=\psi(A)$, 由此 $f(A)=g(A)$. 这样就证明了定理 29.

矩阵的隐函数

设 $F(z,w)$ 是两个复变量的函数, 它是由级数

$$F(z,w)=a+bz+cw+dz^2+ezw+fw^2+\cdots \tag{12}$$

给定的. 在改变这级数各项因子的顺序时 (例如把乘积 $z^\alpha w^\beta$ 变为 $w^\beta z^\alpha$), 函数 $F(z,w)$ 是不变的. 所以, 在级数 (12) 中以矩阵 A 和 B 代替它的变量 z 和 w 时, 自然应限于矩阵 A 和 B 是可交换的情形. 如果级数 (12) 对于变量 z 和 w 的任何值是收敛的, 那么可以证明, 在这级数用任何可交换的矩阵 A 和 B 代替 z 和 w 时, 我们得到收敛的矩阵级数, 它定义了某一矩阵, 记之为 $F(A,B)$. 可是, 因为下面仅讨论依赖于 z 的项数是有限的那种特殊情形, 因此, 实际上是讨论一个复变量 w 的收敛级数, 所以我们不证明这个级数在一般情形下的收敛性.

(C) 设函数 $F(z,w)$ 是由级数 (12) 确定的两个变量的解析函数, 级数 (12) 对 z, w 的所有值是收敛的, 又 A 是给定的矩阵. 其次假设, 对应于矩阵 A 的每一个特征值 λ_i, 有数 μ_i 满足条件

$$F(\lambda_i,\mu_i)=0,\quad \frac{\partial}{\partial w}F(\lambda_i,\mu_i)\neq 0,\quad i=1,\cdots,r. \tag{13}$$

这时, 存在与 A 可交换的矩阵 B 满足条件

$$F(A,B)=0. \tag{14}$$

同时, 如果级数 (12) 的系数以及矩阵 A 是实的, 又对于矩阵 A 的每一对复共轭的特征值 λ_i 和 $\lambda_j=\overline{\lambda_i}$ 相应的数 μ_i 和 μ_j 也是复共轭的: $\mu_j=\overline{\mu_i}$, 那么存在与 A 可交换的实矩阵 B 满足条件 (14).

我们来证明命题 (C). 根据复变量的隐函数定理, 由关系 (13) 推知, 对于任何 $i=1,\cdots,r$, 存在对 λ_i 附近的 z 有定义的函数 $W(z)=W_i(z)$, 满足条件

$$F(z,W(z))=0, \tag{15}$$

$$W(\lambda_i)=\mu_i,\quad i=1,\cdots,r. \tag{16}$$

为了求函数 $W(z)$ 在点 $z=\lambda_i$ 处的导数 $W^{(j)}(\lambda_i)$, 应该关于 z 依次求导关系式 (15), 并且在其中代以 $z=\lambda_i$:

$$\frac{d^j}{dz^j}F(z,W(z))|_{z=\lambda_i}=0 \tag{17}$$

由这些关系, 顺次确定出数

$$W^{(j)}(\lambda_i),\quad j=1,\cdots,k_i-1;\quad i=1,\cdots,r. \tag{18}$$

从数 (16),(18) 出发, 确定满足条件 (4) 的多项式 $\varphi(z)$. 我们来证明, 矩阵 $B=\varphi(A)$ (显然与 A 可交换) 满足条件 (14).

为此, 在级数 (12) 中以 $w=\varphi(z)$ 代入. 这时, 我们得到变量 z 的函数 $\Phi(z)=F(z,\varphi(z))$. 为了证明等式 (14), 只要证明函数 $\Phi(z)$ 在矩阵 A 的谱上是零就可以了 (参看定理 29). 因为多项式 $\varphi(z)$ 和函数 $W(z)$ 在点 λ_i 处的 0 阶, 1 阶, $\cdots$, k_i-1 阶导数是分别相等的, 所以在计算函数 $\Phi(z)$ 在点 λ_i 的导数 $\Phi^{(j)}(\lambda_i), j=0,\cdots,k_i-1$ 时, 可以用函数 $W(z)$ 代替多项式 $\varphi(z)$. 但在 $F(z,\varphi(z))$ 中用定义在 λ_i 附近的函数 $W(z)$ 代替多项式 $\varphi(z)$ 时, 我们得到它恒等于零 (参看 (15)). 因此, 函数 $\Phi(z)$ 在矩阵 A 的谱上等于零.

现在证明, 如果级数 (12) 的系数以及矩阵 A 是实的, 又数 μ_i 满足共轭性条件, 即

$$W(\overline{\lambda_i})=\overline{W(\lambda_i)},\quad i=1,\cdots,r,$$

那么多项式 $\varphi(z)$, 因而矩阵 $B=\varphi(A)$ 是实的. 事实上, 在这些假设下, 从条件 (17) 计算出的数 $W^{(j)}(\lambda_i)$ 满足条件 (5), 于是多项式 $\varphi(z)$ 是实的 (参看 (B)).

这样就证明了命题 (C).

(D) 复变量 z 的解析函数 e^z 是用级数

$$e^z=1+z+\frac{z^2}{2!}+\cdots+\frac{z^n}{n!}+\cdots \tag{19}$$

定义的, 这个级数对变量 z 的所有值是收敛的. 如所知, 由级数 (19) 的性质可导出, 对于任何两个复数 z 和 w, 成立恒等式 $e^{z+w} = e^z e^w$. 由此推出, 对于任何两个可交换方阵 A 和 B, 成立着恒等式

$$e^{A+B} = e^A \cdot e^B. \tag{20}$$

可以证明, 对于任何非退化矩阵 A, 存在一个与 A 可交换的矩阵 B, 满足条件

$$e^B = A. \tag{21}$$

同时可以证明, 对于任何实的非退化矩阵 A, 存在与 A 可交换的实矩阵 B_1, 满足条件

$$e^{B_1} = A^2. \tag{22}$$

为了证明方程 (21) 关于 B 的可解性, 只要把命题 (C) 应用到函数 $F(z,w) = e^w - z$ 即可. 事实上, 因为矩阵 A 是不退化的, 所以它的所有特征值 λ_i 异于零, 于是存在数 μ_i 满足条件 $e^{\mu_i} - \lambda_i = 0$ (参看关系式 (13) 的第一个), 并且 (13) 的第二式明显地成立.

为了证明存在实数的矩阵 B_1 满足条件 (22), 只要对函数 $F(z,w) = e^w - z^2$ 应用命题 (C) 的第二部分. 事实上, 如果 λ_i 是正的或负的实数, 那么取对数的实分支, 置 $\mu_i = \ln \lambda_i^2$; 如果 λ_i 是复数, 那么取 $W(\lambda_i)$ 和 $W(\overline{\lambda_i})$ 是互相共轭的复数.

因此, 命题 (D) 得证.

§36. 矩阵的若尔当型

(A) 如果空间 R 的向量序列

$$\boldsymbol{h}_1, \boldsymbol{h}_2, \cdots, \boldsymbol{h}_m \tag{1}$$

满足关系式

$$\boldsymbol{h}_1 \neq 0, \quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{h}_1 = \lambda \boldsymbol{h}_1, \quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{h}_2 = \lambda \boldsymbol{h}_2 + \boldsymbol{h}_1, \quad \cdots, \quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{h}_m = \lambda \boldsymbol{h}_m + \boldsymbol{h}_{m-1},$$

那么就称 (1) 为关于变换 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 λ 的**系列**. 如果变换 $\boldsymbol{A}$ 的矩阵 A 是实的, 那么序列

$$\overline{\boldsymbol{h}}_1, \cdots, \overline{\boldsymbol{h}}_m \tag{2}$$

显然构成关于特征值 $\overline{\lambda}$ 的系列. 我们将称系列 (1) 和 (2) 是**复共轭的**. 如果数 λ 和向量序列 (1) 是实的, 那么就认为系列是**实的**.

定理 30 空间 R 中存在由关于变换 $\boldsymbol{A}$ 的一个或者几个系列的所有向量组成的基. 如果矩阵 A 是实的, 那么可以如此选取构成基的系列, 使得对应于实特征值的系列是实的, 而对应于复特征值的系列是成对共轭的.

证明　设

$$\Delta(z) = (z-\lambda_1)^{k_1}\cdots(z-\lambda_r)^{k_r} \tag{3}$$

是矩阵 A 的最小零化多项式, 其中

$$\lambda_1, \cdots, \lambda_r$$

是矩阵 A 的两两互异特征值. 根据 § 34 的命题 (G), 空间 R 可以分解成与因子 (3) 相对应的子空间 $S_1, \cdots, S_r$ 的直和, 因此空间 S_i 是由所有满足条件 $(\boldsymbol{A}-\lambda_i\boldsymbol{E})^{k_i}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的向量 $\boldsymbol{x}$ 组成的. 这就意味着, 把 $\boldsymbol{A}$ 作为 S_i 上的变换时, 其零化多项式就是 $(z-\lambda_i)^{k_i}$. 容易看出, 这个多项式就是最小零化多项式.

假设矩阵 A 是实的. 首先将 (3) 中所有实值 λ_i 的因子放在因子 $\Delta_1(z)$ 里, 而所有其他的因子放在因子 $\Delta_2(z)$ 里. 于是 $\Delta(z)=\Delta_1(z)\Delta_2(z)$ 是分解成实的互质因子, 而空间 R 相应分解成可以认为是实子空间 R_1 和 R_2 的直和. 现在将空间 R_1 分解为对应于实特征值 λ_i 的实子空间的直和, 下面我们就在这些直和的实子空间中构造由实系列组成的基. 将空间 R_2 分解为对应于复共轭特征值的成对复共轭子空间的直和, 下面我们就在这些复共轭空间中构造由复共轭系列组成的基; 这时只要从两个相互复共轭空间中之一的系列构造出基, 而在另一个空间中取复共轭基就可以了.

于是我们只需证明, 如果作用在向量空间 S 上的线性变换 $\boldsymbol{A}$ 有最小零化多项式 $(z-\lambda)^k$, 那么在这个空间中可以选取由关于变换 $\boldsymbol{A}$ 的系列所组成的基, 而且如果空间 S 、矩阵 A 以及数 λ 是实的, 那么从系列中选取的基也是实的.

我们来证明这个结论. 为简单起见, 令 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}$, 并且用 T_i 记 S 中满足条件

$$\boldsymbol{C}^i\boldsymbol{x}=0$$

的所有向量 $\boldsymbol{x}$ 的集合. 于是我们有

$$S=T_k\supset T_{k-1}\supset\cdots\supset T_1\supset T_0=0.$$

设

$$\boldsymbol{h}_i^1, \cdots, \boldsymbol{h}_i^r, \quad i=1,\cdots,k$$

是 T_i 中关于空间 T_{i-1} 线性无关的向量组, 这就是说, 向量

$$a_1\boldsymbol{h}_i^1+\cdots+a_r\boldsymbol{h}_i^r$$

只有在

$$a_1=\cdots=a_r=0$$

时才能属于空间 T_{i-1}. 现在证明, 当 i 和 j 固定时, 向量

$$\boldsymbol{h}_{i-j}^\alpha=\boldsymbol{C}^j\boldsymbol{h}_i^\alpha, \quad (j<i) \tag{4}$$

属于空间 T_{i-j} , 并且关于空间 T_{i-j-1} 线性无关. 事实上我们有

$$C^{i-j}h_{i-j}^{\alpha}=C^{i}h_{i}^{\alpha}=\mathbf{0},\quad(\alpha=1,\cdots,r),$$

因而向量 (4) 属于空间 T_{i-j} . 现在假设向量

$$a_1h_{i-j}^1+\cdots+a_rh_{i-j}^r=x$$

属于空间 T_{i-j-1} , 于是有

$$\mathbf{0}=C^{i-j-1}x=C^{i-1}(a_1h_i^1+\cdots+a_rh_i^r),$$

而这就表示向量 $a_1h_i^1+\cdots+a_rh_i^r$ 属于空间 T_{i-1} , 因此数 $a_1,\cdots,a_r$ 等于零.

现在我们在空间 T_k 中选取关于空间 T_{k-1} 线性无关的最大向量组

$$h_k^1,\cdots,h_k^{r_k}. \tag{5}$$

根据上面的证明, 向量

$$h_{k-1}^{\alpha}=Ch_k^{\alpha},\quad(\alpha=1,\cdots,r_k) \tag{6}$$

属于空间 T_{k-1} 并且关于空间 T_{k-2} 是线性无关的; 因此, 可以将组 (6) 补充到向量组

$$h_{k-1}^1,\cdots,h_{k-1}^{r_{k-1}},\quad(r_{k-1}\geqslant r_k) \tag{7}$$

中, 使它成为空间 T_{k-1} 中关于空间 T_{k-2} 是线性无关的最大向量组. 继续重复这一过程, 我们就在空间 $T_i,(i>0)$ 中构造出最大的向量组

$$h_i^1,\cdots,h_i^{r_i}, \tag{8}$$

它关于空间 T_{i-1} 是线性无关的, 并且满足关系

$$h_i^{\alpha}=Ch_{i+1}^{\alpha},\quad(\alpha=1,\cdots,r_{i+1};\quad r_i\geqslant r_{i+1}).$$

现在证明, 属于所有组 (8) $i=j,j-1,\cdots,1$ 的一切向量的集合 Σ_j 构成空间 T_j 的基. 为此, 我们将对数 j 进行归纳法证明. 对于 $j=1$, 组 Σ_1 和组 (8) 当 $i=1$ 时完全一样, 因此它是空间 T_1 的基 ($T_0=0$). 假设已经对于组 Σ_j 证明了我们的结论, 应当证明它对于 Σ_{j+1} 也成立. 假设关系式

$$a_1h_{j+1}^1+\cdots+a_{r_{j+1}}h_{j+1}^{r_{j+1}}+b_1h_j^1+\cdots+b_{r_j}h_j^{r_j}+\cdots=\mathbf{0} \tag{9}$$

成立. 对于关系式 (9) 应用变换 C^j , 即得

$$a_1h_1^1+\cdots+a_{r_{j+1}}h_1^{r_{j+1}}=\mathbf{0},$$

而这只有当 $a_1 = \cdots = a_{r_{j+1}} = 0$ 时才可能; 所以在关系式 (9) 中只能出现组 Σ_j 的向量, 因而根据归纳法假设, 关系式 (9) 是平凡的 (即 $b_1 = \cdots = b_{r_j} = \cdots = 0$). 现在设 $\boldsymbol{x}$ 是空间 T_{j+1} 的任一向量. 因为组 (8) 当 $i = j+1$ 时是关于 T_j 线性无关的最大向量组, 所以存在这样的向量

$$\boldsymbol{y} = a_1 \boldsymbol{h}_{j+1}^1 + \cdots + a_{r_{j+1}} \boldsymbol{h}_{j+1}^{r_{j+1}},$$

使得向量 $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}$ 属于空间 T_j, 而根据归纳法假设, 它可以用组 Σ_j 中的向量线性表示, 这就是说, 向量 $\boldsymbol{x}$ 可以用向量组 Σ_{j+1} 来线性表示.

于是证明了 Σ_k 是空间 $S = T_k$ 的基.

如果空间 S, 矩阵 A 以及数 λ 都是实的, 那么选取向量组 (5) 为实的之后, 我们就得到实向量组 (6), 它可以补充到实向量组 (7) 中去. 重复这样的方法, 我们得到**实**向量组 Σ_k.

现在证明, 组 Σ_k 是由系列组成的. 也就是要证明, 向量 $\boldsymbol{h}_1^\alpha, \boldsymbol{h}_2^\alpha, \cdots$ 构成关于特征值 λ 的系列. 我们有

$$\boldsymbol{0} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{h}_1^\alpha = (\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E})\boldsymbol{h}_1^\alpha,$$

因此 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{h}_1^\alpha = \lambda \boldsymbol{h}_1^\alpha$; 其次,

$$\boldsymbol{h}_1^\alpha = \boldsymbol{C}\boldsymbol{h}_2^\alpha = (\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E})\boldsymbol{h}_2^\alpha,$$

所以 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{h}_2^\alpha = \lambda \boldsymbol{h}_2^\alpha + \boldsymbol{h}_1^\alpha$, 等等.

于是定理 30 得证.

在按照定理 30 所构造出的基之下, 对应于变换 $\boldsymbol{A}$ 的矩阵已不是原来的矩阵 $A = (a_j^i)$, 而是某一个新矩阵 $B = (b_j^i)$, 它有所谓**若尔当型**的非常简单的形式. 所以, 定理 30 是一个**把矩阵变成若尔当型的定理**. 我们来仔细地分析这一个问题.

(B) 由关系式

$$g_i^i = \lambda, \quad i = 1, \cdots, m; \quad g_{i+1}^i = 1, \quad i = 1, \cdots, m-1;$$

$$g_j^i = 0, \quad \text{当 } j - i < 0 \text{ 和 } j - i > 1 \text{ 时}$$

所确定的 m 阶方阵 (g_j^i), 亦即矩阵

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

称为特征值 λ 的 m 阶若尔当块. 可以证明, 对于每一个 n 阶方阵 A, 都可以选取这样的非退化方阵 S, 使得从矩阵 A 经过矩阵 S 变换以后得到的方阵 $B=SAS^{-1}$ 有**若尔当型**, 也就是这样一个矩阵, 位在其主对角线上的是一个或几个若尔当块, 而所有不在若尔当块上的元素都等于零.

现在来证明这个命题. 设 R 是 n 维坐标向量空间, 而 $\boldsymbol{A}$ 是 (在某一坐标系下) 对应于矩阵 A 的线性变换. 再设 $\boldsymbol{f}_1,\cdots,\boldsymbol{f}_n$ 是空间 R 由系列组成的基 (见定理 30). 我们假设向量 $\boldsymbol{f}_1,\cdots,\boldsymbol{f}_n$ 是依次按照从一个向量系列到另一个向量系列的顺序安排的. 以 $B=(b^i_j)$ 记变换 $\boldsymbol{A}$ 在基 $\boldsymbol{f}_1,\cdots,\boldsymbol{f}_n$ 之下的矩阵. 令

$$\boldsymbol{h}_1=\boldsymbol{f}_1, \quad \cdots, \quad \boldsymbol{h}_m=\boldsymbol{f}_m$$

是出现在序列 $f_1,\cdots,f_n$ 中的第一个系列, 而 λ 是其对应的特征值. 于是, 由系列的定义直接得出

$$b^i_j=\lambda, \quad i=1,\cdots,m; \quad b^i_{i+1}=1, \quad i=1,\cdots,m-1;$$

$$b^i_j=0, \quad \text{当 } i+1<j\leqslant m \text{ 和 } i>j\leqslant m \text{ 时}.$$

因此, 序列 $\boldsymbol{f}_1,\cdots,\boldsymbol{f}_n$ 的第一个系列就对应于矩阵 B 的第一个若尔当块. 完全一样地, 基 $\boldsymbol{f}_1,\cdots,\boldsymbol{f}_n$ 的第二个系列对应于矩阵 B 的第二个若尔当块, 等等. 因为从矩阵 A 到矩阵 B 是由相似变换实现的 (见 §34, (A)), 所以 $B=SAS^{-1}$.

于是命题 (B) 得证.

名词索引

Z

译者后记

在 20 世纪 50 年代末、60 年代初, 根据毛泽东主席的《实践论》, 我国的数学教学和科研工作者们正在为数学科学要不要联系实际进行大辩论和社会实践时, 原苏联科学院 Л. С. 庞特里亚金院士已将他在莫斯科大学多年工作的丰富经验和深刻认识写进了这本教科书, 科学技术在近半个世纪来的飞快发展进一步证明了他在当时的远见卓识和认识的正确性. 我们现在将这本书的第 6 版翻译出来, 无论对蓬勃发展的数学建模、应用数学, 还是对常微分方程理论本身今后的研究, 都有重要的参考价值. 历史经验已经证明, 理论必须联系实际、接受实践的检验, 也应当从实践中吸取力量、发展理论本身. 在本书的翻译过程中, 译者不仅得到上海高校计算科学E–研究院上海交通大学研究所同仁们在各方面的大力协助, 也得到高等教育出版社张小萍和赵天夫两位编辑热情、无私的帮助, 在此一并表示衷心感谢. 由于经验和水平等原因, 翻译中错误在所难免, 希望读者们多加批评指正.

译者于上海

2006 年 5 月